

Geometrische Effekte in der Quantenmechanik

Michael Hahn

2014

Betreuer: Prof. Dr. Stefan Teufel

Eberhard Karls Universität
Tübingen

Hiermit versichere ich, dass ich die vorgelegte Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt habe. Alle Stellen der Arbeit, die ich anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen habe, sind kenntlich gemacht.

(Datum)

(Unterschrift)

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit quantenmechanischen Effekten, die ihre Erklärung in der Geometrie des Konfigurationsraumes haben. Wir betrachten zunächst den Aharonov-Bohm-Effekt und zeigen, wie sich dieser auf natürliche Weise mithilfe des Konzepts von Zusammenhängen auf Vektorbündeln beschreiben lässt. Wir beschreiben dann, wie sich dieses auf adiabatische Zeitentwicklungen anwenden lässt. Dort tritt ein Phasenfaktor auf, die Berry-Phase, die als Ausdruck des Paralleltransports entlang eines Zusammenhangs des Konfigurationsraumes, des Berry-Zusammenhangs, aufgefasst werden kann. Anschliessend betrachten wir exemplarisch zwei Phänomene der Festkörperphysik, in denen der Berry-Zusammenhang eine Rolle spielt: den Piezo-Strom und den Quanten-Hall-Effekt. Beim Piezo-Strom leiten wir die Kingsmith-Vanderbilt-Formel her, die die Ladungsveränderung mithilfe des Berry-Zusammenhangs beschreibt. Beim Quanten-Hall-Effekt zeigen wir, dass der Hallstrom proportional zum Integral über die Krümmung eines Berry-Zusammenhangs ist. Mit einer Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Gauss-Bonnet, die wir dann beweisen, folgt die Quantisierung des Stroms im Quanten-Hall-Effekt.

2 Aharonov-Bohm-Effekt

Wir betrachten zunächst ein Experiment (Abbildung 1, AB59). Elektronen werden auf einen Schirm geschickt. Vor dem Schirm befindet sich eine Spule, die orthogonal zur Bewegungsrichtung der Elektronen steht und die von den Elektronen abgeschirmt ist. In ihrem Innern befindet sich ein Magnetfeld, das außerhalb (nahezu) verschwindet. Die Elektronen werden so präpariert, dass ihre Wellenfunktionen soweit ausgedehnt sind, dass sie auf beiden Seiten der Spule vorbeifliegen können, ohne dass gemessen wird, auf welcher Seite ein Elektron vorbeigeflogen ist. Wie beim gewöhnlichen Doppelspaltexperiment zeigt sich in der Auftreffhäufigkeit der Elektronen auf dem Schirm ein Interferenzmuster. Variiert man nun die Stärke des Magnetfelds, verändert sich auch das Interferenzmuster – obwohl sich die Elektronen nur ausserhalb des Magnetfelds bewegen konnten. Wir zeigen zunächst kurz, wie der Effekt in der theoretischen Physik beschrieben wird. Das Magnetfeld B wird als Vektorfeld beschrieben. Zu einem Magnetfeld wählt man ein – nicht eindeutig bestimmtes – *Vektorpotential* A mit $B = \text{rot } A$, dessen Existenz auf sternförmigen Gebieten sich aus $\text{div } B = 0$ ergibt. Bei der kanonischen Quantisierung der Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens im Magnetfeld $H = (p - A)^2 + V$ ergibt sich der Hamiltonoperator

$$H := \sum_{i=1}^3 (-i\partial_i + iA_i)^2 + V$$

Sei Ω ein Gebiet mit glattem Rand, das die Spule enthält. Dann ist mit Stokes $\int_{\partial\Omega} A = \int_{\Omega} B \neq 0$. Also ergibt sich, dass außerhalb der Spule das Vektorpotential in beliebig großen Entfernungen von der Spule nicht verschwinden kann. Da der Hamiltonoperator vom Vektorpotential abhängt, ergibt sich, wie wir unten zeigen werden, eine Phasenverschiebung der Wellenfunktion.

Wir werden nun zeigen, wie sich der Aharonov-Bohm-Effekt geometrisch beschreiben lässt. Wir führen dazu zunächst einige grundlegende Begriffe der Differentialgeometrie ein.

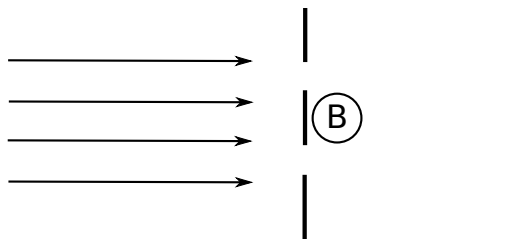


Abbildung 1: Das Aharonov-Bohm-Experiment. In der Mitte eine Wand mit einem Doppelspalt und der Spule, rechts ein Schirm.

3 Zusammenhänge auf Vektorbündeln

Im Folgenden sei \mathbb{K} immer \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Wir definieren zunächst Vektorbündel. Diese verallgemeinern das Tangentialbündel und andere Tensorbündel; wie diese ordnen sie jedem Punkt auf einer Mannigfaltigkeit so einen Vektorraum zu, dass die Vektorräume sich beim Verändern des Basispunktes in einem geeigneten Sinne glatt ändern. Die Darstellung orientiert sich teilweise an [Her70], [Spi79], [Nic07].

Definition 1. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein \mathbb{K} -Vektorbündel E über M vom Rang r ist eine Mannigfaltigkeit mit einer surjektiven Submersion $\pi_E : E \rightarrow M$, sodass gilt:

1. Für jedes $p \in M$ ist $E_p := \pi_E^{-1}(p)$ mit einer r -dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraumstruktur versehen.

Wir nennen E_p die *Faser* von E über p .

2. M hat eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ mit Diffeomorphismen $\Phi^\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^r$, sodass für alle $p \in U_\alpha$ gilt: $\Phi^\alpha(\pi_E^{-1}(p)) \subset \{p\} \times \mathbb{K}^r$, und die Abbildung $\pi^2 \circ (\Phi^\alpha|_{\pi^{-1}(p)}) : E_p \rightarrow \mathbb{K}^r$ ein \mathbb{K} -Vektorraum-Isomorphismus ist.

Solche Φ^α heißen *lokale Trivialisierungen*.

Beispiel 2. $E := M \times \mathbb{K}^r$ mit der Produktmannigfaltigkeitsstruktur wird mit $\pi_E : E \rightarrow M : (p, q) \mapsto p$ zu einem Vektorbündel, dem *trivialen Bündel*. In diesem Fall gibt es eine trivialisierende Überdeckung aus nur einer Menge, nämlich M selbst, und die Trivialisierung Φ ist die Identität. π_E ist eine Submersion, da $DP|_p$ auf einem Vektor aus $T_p M \times \{0\} \cong T_p M$ die Identität ist. Bündel mit einer global definierten Trivialisierung heißen *trivialisierbar*.

Das Tangentialbündel und andere Tensorbündel sind auch Vektorbündel. In diesen Bündeln entstehen die lokalen Trivialisierungen aus den lokalen Koordinatenvektorfeldern und Koordinaten-1-Formen, die durch Karten gegeben sind, und aus deren Tensorprodukten. Ein Beispiel für ein Bündel, das nicht trivialisierbar ist, ist das Tangentialbündel der $2n$ -Sphäre, das nach dem Igelsatz nicht trivialisierbar sein kann, da z.B. die Teilmenge $\{\langle x, (1, \dots, 0) \rangle\} \subset S^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ durch eine globale Trivialisierung auf ein nirgends verschwindendes Vektorfeld abgebildet würde.

Ein anderes Beispiel für ein Bündel, das nicht trivialisierbar ist, ergibt sich, wenn man die Fasern $\pi^{-1}(0)$ und $\pi^{-1}(1)$ des trivialen Vektorbündels $[0, 1] \times \mathbb{R}$

vermittels $\phi : \pi^{-1}(0) \rightarrow \pi^{-1}(1) : (0, x) \mapsto (1, -x)$ miteinander identifiziert. Das entstehende Bündel ist eine Version des Möbiusbandes und nicht trivialisierbar.

Ist E ein Vektorbündel über M und $U \subset M$ ist offen, dann ist die Untermannigfaltigkeit $\pi^{-1}(U)$ auch ein Vektorbündel mit der gleichen Vektorraumstruktur. Trivialisierungen erhält man, indem man die Trivialisierungen Φ^α zu E auf $U \cap U_\alpha$ einschränkt. Also ist für jedes α das Bündel $\pi^{-1}(U_\alpha)$ trivialisierbar vermittels der Trivialisierung Φ^α .

Definition 3. Sei E Vektorbündel über M . Die Menge der *Schnitte* von E , $\Gamma(E)$, ist die Menge der glatten Abbildungen $\sigma : M \rightarrow E$ mit $\pi_E \circ \sigma = id|_M$.

Die Schnitte eines Tensorbündels sind genau die entsprechenden Tensoren. Um Häufungen von Klammern zu vermeiden, schreiben wir teilweise $\sigma|_p$ für $\sigma(p)$.

Definition 4. Seien E, F Vektorbündel über M . Eine glatte Abbildung $T : E \rightarrow F$ heißt *Vektorbündelhomomorphismus*, wenn gilt: (1) $\pi_E = \pi_F \circ T$, (2) für jedes $p \in M$ ist $T|_{E_p} : E_p \rightarrow F_p$ ein \mathbb{K} -Vektorraum-Homomorphismus.

Proposition 5. Seien E, F Vektorbündel über M . Die Menge der Vektorraumhomomorphismen von E_p nach F_p (für jedes $p \in M$) bildet auf kanonische Weise ein Vektorbündel über M , dessen Schnitte genau die Vektorbündelhomomorphismen $E \rightarrow F$ sind. Wir bezeichnen dieses Bündel mit $Hom(E, F)$.

Beweis. Setze $\pi(a) := p$ falls $a : E_p \rightarrow F_p$. Sind $\Phi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^s$ und $\Psi_\alpha : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ lokale Trivialisierungen, definiere $\Xi_\alpha : \pi_{Hom(E,F)}^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times Mat(r \times s, \mathbb{K}) \cong U_\alpha \times \mathbb{K}^{rs}$ so, dass für einen Homomorphismus $a : E_p \rightarrow F_p$ ($p \in U_\alpha$) und ein $v \in E_p$ gilt: $\Xi_\alpha(a) = \Psi_\alpha \circ a \circ \Phi_\alpha^{-1}$. Damit gilt $\Xi_\alpha \circ \Xi_\beta^{-1}(x, A) = \Psi^\alpha \circ (\Psi^\beta)^{-1} \circ (id, A) \circ \Phi^\beta \circ (\Phi^\alpha)^{-1}$ und der Trivialisierungswechsel ist glatt. Durch diese Abbildungen als Karten wird $Hom(E, F)$ eine Mannigfaltigkeit, und durch sie als lokale Trivialisierungen wird es ein Vektorbündel. Nun sind die glatten Bündelhomomorphismen zwischen trivialen Bündeln genau durch glatte Schnitte von $U_\alpha \times Mat(r \times s, \mathbb{K})$ gegeben. Da Glattheit eine lokale Eigenschaft ist, folgt die Aussage über die Schnitte. \square

Beispiele für Homomorphismenbündel sind Tensorbündel, beispielsweise ist $Hom(TM, T^*M) \cong T^*M \otimes T^*M$ das Bündel der Bilinearformen auf dem Tangentialbündel.

Auf einem Vektorbündel gibt es im Allgemeinen keinen kanonischen Begriff für die Ableitung eines Schnittes, da es keine kanonische Identifikation zwischen den Fasern an verschiedenen Punkten gibt. Dennoch existieren Operatoren auf dem Raum der Schnitte, welche die wesentlichen Eigenschaften einer Ableitung haben:

Definition 6. Sei M Mannigfaltigkeit, E Vektorbündel über M . Ein *Zusammenhang* ist eine \mathbb{K} -lineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(Hom(TM, E))$$

welche die Leibnizregel

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f \cdot (\nabla\sigma) \text{ für } f \in C^\infty(M), \sigma \in \Gamma(E)$$

erfüllt, wobei $(df \otimes \sigma)(v) := df(v) \cdot \sigma$. Wir schreiben $\nabla_V \sigma := D(\sigma, V)$.

Auf dem Vektorbündel $M \times \mathbb{K}^r$ können die Fasern in verschiedenen Punkten auf kanonische Weise identifiziert werden. Damit machen Differenzenquotienten entlang einer Kurve Sinn und die Ableitung $D_v \psi$ eines Schnittes ψ in Richtung v ist kanonisch definiert und D bildet einen Zusammenhang.

Damit gibt es auf jedem Vektorbündel lokal definierte Zusammenhänge, indem man die Ableitung entlang einer lokalen Trivialisierung zurückzieht: $(\nabla_v \psi)|_p := (D_v(\Psi^\alpha \circ \psi))|_p$. Da der Raum der Zusammenhänge unter Konvexkombinationen abgeschlossen ist, gibt es mit einer Zerlegung der Eins auch einen global definierten Zusammenhang.

Die Menge der Zusammenhänge zu einem Vektorbündel bildet einen affinen Raum über $\Gamma(\text{Hom}(TM, \text{Hom}(E, E)))$, den Endomorphismus-wertigen 1-Formen:

Satz 7. Die Differenz zweier Zusammenhänge ist durch einen Bündelhomomorphismus gegeben: Seien ∇, ∇' Zusammenhänge auf E . Dann gibt es eine 1-Form $\omega \in \Gamma(\text{Hom}(TM, \text{Hom}(E, E)))$, sodass für alle $p \in M, \psi \in \Gamma(E), v \in T_p M$ gilt:

$$\nabla_v \psi - \nabla'_v \psi = \omega(v)\psi|_p$$

Umgekehrt: Ist ∇ ein Zusammenhang und $\omega \in \Gamma(\text{Hom}(TM, \text{Hom}(E, E)))$, dann ist $\nabla + \omega$ definiert durch

$$\sigma \in \Gamma(E), v \in T_p M \mapsto (\nabla_v \sigma)|_p + (\omega|_p(v))(\sigma|_p)$$

ein Zusammenhang.

Beweis. Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition eines Zusammenhangs. Für die erste Aussage zeigt man mit der Leibnizregel, dass $(\nabla - \nabla')f\psi = f(\nabla - \nabla')\psi$ für alle $f \in C^\infty(M)$ gilt. Wir wollen daraus folgern, dass $((\nabla - \nabla')\psi)|_p$ nur von $\psi|_p$ abhängt. Setze $A := (\nabla - \nabla')$. Sei $U \subset M$ mit lokaler Trivialisierung Ψ . Sei $p_0 \in U$. Wähle $f \in C^\infty(M)$ und $V \subset U$ offen mit $p_0 \in V$, $\text{supp}(f) \subset U$, $f|_V \equiv 1$. Gilt $\psi|_U \equiv 0$, dann ist $(1-f)\psi = \psi$, also $(A\psi)|_{p_0} = ((1-f)A\psi)|_{p_0} = 0$. Da A linear ist, hängt somit $A\psi|_U$ nur von $\psi|_U$ ab. Nun gibt es Funktionen $f_i \in C^\infty(U)$ mit $\psi(p) = \sum_i f_i(p)\Psi^{-1}(\langle p, e_i \rangle)$. Also gilt $(A\psi)|_p = \sum_i f_i(p)(A\Psi^{-1}(\langle p, e_i \rangle))$ und falls $\psi|_p = 0$ gilt, ist auch $(A\psi)|_p = 0$. Also hängt $(A\psi)|_p$ nur von $\psi|_p$ ab und man erhält ω . Da A linear ist, ist ω in $\psi|_p$ linear. □

Definition 8. Ein *Rahmen* ist eine Familie von Schnitten $e_1, \dots, e_r \in \Gamma(E)$, die in jeder Faser linear unabhängig sind. Ein *lokaler Rahmen* ist ein Rahmen, dessen Elemente auf einer offenen Teilmenge U von M definiert sind.

Eine lokale Trivialisierung induziert einen lokalen Rahmen als Menge der Urbilder von $U_\alpha \times \{e_i\}$ (e_i der i -te Einheitsvektor, $i = 1, \dots, r$). Umgekehrt induziert ein Rahmen f_1, \dots, f_r eine Trivialisierung $\Phi : E \rightarrow M \times \mathbb{K}^r$, indem man für Φ^{-1} jedes $(p, (\lambda_1, \dots, \lambda_r)) \in M \times \mathbb{K}^r$ auf $\sum_i \lambda_i f_i(p) \in E$ abbildet. Da die Addition und Skalarmultiplikation auf Vektorbündeln glatt sind, weil sie auf jedem $U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ glatt sind, ist Φ^{-1} glatt. $D\Phi^{-1}$ hat überall vollen Rang, weil $\Psi \circ \Phi^{-1}$ in der ersten Komponente die Identität und in der zweiten Komponente

ein Vektorraumisomorphismus ist, falls Ψ irgendeine (lokale) Trivialisierung von E ist. Mit dem Satz über inverse Funktionen folgt damit, dass auch Φ glatt ist und damit eine Trivialisierung darstellt. Vermittels Φ induziert der Rahmen einen *trivialen Zusammenhang* $D^{(f)} := \Phi_* D := \sigma \mapsto \Phi^{-1} D(\Phi \circ \sigma)$, wobei D der von der Ableitung gegebene Zusammenhang auf $M \times \mathbb{K}^r$ ist. Insbesondere gilt dann $D^{(f)} f_i = D(e_i) = 0$. Aber nicht jeder Zusammenhang auf einem trivialisierbaren Vektorbündel ist trivial, wie wir später sehen werden.

In einem lokalen Rahmen f_1, \dots, f_r wird ∇ durch die Differenz zum trivialen Zusammenhang $D^{(f)}$ gegeben, die wir mit $\omega^{(f)}$ bezeichnen: $\nabla = D^{(f)} + \omega^{(f)}$. Die Koeffizienten des Endomorphismus $\omega^{(f)}|_p$ heißen *Christoffelsymbole*.

Definition 9. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve. Eine glatte Abbildung $\sigma : [0, 1] \rightarrow E$ heißt *parallel* entlang γ , wenn $\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma = 0$ gilt.

Da σ nur entlang der Kurve definiert ist, ist dabei der Ausdruck $(\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma)|_{\gamma(t)}$ als $(\Psi^\alpha)^{-1} \left(\gamma(t), \frac{d}{dt} \pi^{(2)}(\Psi^\alpha \circ \sigma)|_{\gamma(t)} + \omega|_p(\dot{\gamma})\sigma|_{\gamma(t)} \right)$ zu verstehen, wobei Ψ^α eine lokale Trivialisierung um p und $\nabla|_{U_\alpha} = \Psi_*^\alpha D + \omega$ sei.

Proposition 10. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve. Zu jedem $\sigma_0 \in E_{\gamma(0)}$ gibt es genau einen parallelen Schnitt $P_\gamma^\nabla(t)\sigma_0$ mit $P_\gamma^\nabla(0)\sigma_0 = \sigma_0$, der *Paralleltransport* entlang γ .

Beweis. Befindet sich γ komplett innerhalb einer trivialisierenden Umgebung U_α , folgt die Aussage aus der Existenz und Eindeutigkeit einer glatten Lösung für lineare gewöhnliche Differenzialgleichungen im \mathbb{K}^r . Ansonsten zerteilt man γ in solche Stücke $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ und löst die Differenzialgleichung stückweise. \square

Im Folgenden nehmen wir an, dass E Rang 1 hat. Da der Raum der Endomorphismen von \mathbb{K} kanonisch gleich zu \mathbb{K} ist, sind damit die äußere Ableitung und das Hutprodukt auf Schnitten von $Hom(TM, Hom(E, E)) \cong \Omega^1(M)$ und $Hom(TM, Hom(TM, Hom(E, E))) \cong \Omega^2(M)$ definiert. Durch geeignete Definition dieser Konstrukte gelten diese Aussagen mit gewissen Modifikationen auf allen Vektorbündeln, wir werden sie aber nur für Linienbündel, d.h. Bündel vom Rang 1, benötigen.

Proposition 11. Sei ein Zusammenhang ∇ gegeben. Sei e ein Rahmen und g ein Bündelautomorphismus mit $f := ge$ (also $g(p) \in \mathbb{K}^* \forall p \in M$). Dann gilt $\omega^{(f)} = \omega^{(e)} + g^{-1}dg$.

Beweis. Es gilt $\nabla f = \omega^{(f)} f = D^{(e)} f + \omega^{(e)} f$, also $(\omega^{(f)} - \omega^{(e)})f = (D^{(e)} - D^{(f)})f = D^{(e)}(ge) = dg \otimes e = g^{-1}dg \otimes f$. \square

Einem Zusammenhang kann ein Maß für die Krümmung zugeordnet werden, eine 2-Form mit Werten in $Hom(E, E)$:

Proposition 12. Sei E Rang-1-Vektorbündel. Ist lokal $\nabla = D + \omega$, wobei D ein (lokaler) trivialer Zusammenhang ist, dann ist durch $R^\nabla := d\omega$ eine von der Wahl von D unabhängige Form gegeben, die *Krümmung* von ∇ .

Beweis. Wegen $d(g^{-1}dg) = d(g^{-1}) \wedge dg - g^{-1} \wedge ddg = -g^{-2}dg \wedge dg = 0$ ist R^∇ unter der vom Wechsel von D induzierten Transformation von ω (Proposition 11) invariant. \square

Bemerkung 13. Der allgemeine Ausdruck der Krümmung ist $R^\nabla = d\omega + \omega \wedge \omega$, wobei der zweite Summand bei Linienbündeln immer 0 ist. Ohne Bezug auf eine Zusammenhangsform kann die Krümmung auch als $R^\nabla(X, Y)\psi = \nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{[X, Y]}\psi$ geschrieben werden, wie sich durch Nachrechnen zeigen lässt. Wir werden diese Formel aber nicht benötigen.

Triviale Zusammenhänge haben also Krümmung 0; Zusammenhänge mit Krümmung 0 heißen *flach*. Intuitiv misst die Krümmung, zu welchem Grad der Paralleltransport vom gewählten Weg abhängt. Um dies zu illustrieren, betrachten wir das triviale Linienbündel $\mathbb{R}^n \times \mathbb{K}$ mit einem beliebigen Zusammenhang $\nabla = D + \omega$, wobei D die Ableitung ist. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\phi \in \mathbb{K}$, dann ist der Paralleltransport entlang γ gegeben durch $P_\gamma^\nabla(t)\phi_{\gamma(0)} = e^{-\int_{\gamma|_{[0,t]}\omega} \phi_{\gamma(t)}}$, wobei wir $\phi_x := (x, \phi)$ schreiben, denn es gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\nabla_{\dot{\gamma}} e^{-\int_{\gamma|_{[0,t]}\omega} \phi_{\gamma(t)}} \right) (\gamma(T)) \\ &= d \left(e^{-\int_{\gamma|_{[0,t]}\omega} \phi_{\gamma(t)}} \right) \Big|_{\gamma(T)} (\dot{\gamma})\phi_{\gamma(T)} + e^{-\int_{\gamma|_{[0,T]}\omega} \phi_{\gamma(T)}} (\nabla_{\dot{\gamma}} \phi_{\gamma(T)}) \Big|_{\gamma(T)} \\ &= e^{-\int_{\gamma|_{[0,T]}\omega} \phi_{\gamma(T)}} \left(-\omega|_{\gamma(T)} \cdot \phi_{\gamma(T)} + (D_{\dot{\gamma}} \phi_x) \Big|_{\gamma(T)} + \omega|_{\gamma(T)} \cdot \phi_{\gamma(T)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ist γ (einfach) geschlossen und umschließt die Fläche Ω , dann gilt mit Stokes wegen $R^\nabla = d\omega$: $P_\gamma^\nabla(1) = e^{-\int_\Omega R^\nabla}$. Hat man nun zwei Wege γ_1, γ_2 mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt, die sonst keine Punkte gemeinsam haben, dann wird der Unterschied im Paralleltransport entlang der beiden Wege beschrieben durch $1 - (P_{\gamma_1}^\nabla)^{-1} \circ P_{\gamma_2}^\nabla = 1 - e^{-\int_\Omega R^\nabla}$, wobei Ω die von γ_1 und γ_2 gemeinsam eingeschlossene Fläche ist. Damit ist der Paralleltransport in einer einfach zusammenhängenden Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ genau dann wegunabhängig, wenn ∇ auf U flach ist. Ist U nicht einfach zusammenhängend, ist dagegen der Paralleltransport auch bei einem flachen Zusammenhang wegababhängig, falls er nicht trivial ist. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, lässt sich damit der Aharonov-Bohm-Effekt geometrisch deuten.

Diese Folgerungen gelten ebenso in Bündeln mit Rang größer 1, bei Linienbündeln lässt sich dies aber besonders einfach zeigen, da dort der Paralleltransport als Lösung einer eindimensionalen linearen gewöhnlichen Differenzialgleichung explizit angegeben werden kann.

4 Aharonov-Bohm-Effekt II

Wir zeigen nun, wie der Aharonov-Bohm-Effekt als geometrisches Phänomen beschrieben werden kann. Wir fassen die Wellenfunktion ψ , die wir als glatt voraussetzen, als Schnitt im trivialen Vektorbündel $E : \Omega \times \mathbb{C}$ auf, wobei Ω ein offenes Gebiet in \mathbb{R}^3 sei. Sei $A = (A_1, A_2, A_3)$ ein Vektorpotential, dann betrachte den Zusammenhang $\nabla := D + i \sum_i A_i dx^i$. Damit ist das Magnetfeld, wenn man es als 2-Form auffasst, die Krümmung von ∇ :

$$R^\nabla = d\omega = \star(\sum_i B_i dx^i)$$

Ist $\nabla' = \nabla + d\eta$ ein weiterer Zusammenhang, dann gilt wegen $dd = 0$ auch $R^{\nabla'} = R^{\nabla}$. Dies entspricht der Aussage, dass die Addition eines Gradientenfeldes zum Vektorpotential das Magnetfeld invariant lässt.

Definition 14. Der Hamiltonoperator eines freien Teilchens im Magnetfeld (ohne skalares Potential) ist der Bochner-Laplace $\Delta_{\nabla} := -\nabla^*\nabla$. Dabei ist $\nabla^* : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}(T^*\Omega, E))$ die (formale) Adjungierte zu ∇ bezüglich der euklidischen Metrik auf $T\Omega \subset T\mathbb{R}^3$: $\nabla_{v^\sharp}^* \phi := \nabla_v \phi$, wobei $\cdot^\sharp : T\Omega \rightarrow T^*\Omega$ der von der Metrik induzierte Isomorphismus sei.

In einer Orthonormalbasis e_i von $T\Omega$ gilt: $\Delta_{\nabla} = -\sum_i (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i}) = -\sum_i (\partial_i + iA_i)^2 = \sum_i (-i\partial_i + A_i)^2$. In diesem Sinne gilt die Schrödingergleichung genauso für Teilchen in Magnetfeldern, die nun aber eine nichttriviale Geometrie, nämlich die vom Vektorpotential beschriebene, erfahren.

Mit Proposition 11 entspricht der Übergang von ∇ zu $\nabla - d\theta$ dem Übergang von einem Rahmen μ zum Rahmen $e^\theta \mu$. Ist also $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sternförmig und gilt bezüglich dem Rahmen μ : $d\omega^{(\mu)}|_U = 0$, dann existiert mit dem Poincaré-Lemma ein $\theta \in C^\infty(U)$ mit $d\theta = \omega|_U$, sodass $\nabla|_U$ der triviale Zusammenhang zum Rahmen $e^\theta \mu|_U$ ist: $\nabla|_U = D^{(\mu)} + \omega = D^{(e^\theta \mu)} - d\theta + \omega = D^{(e^\theta \mu)}$.

Wir können nun den Aharonov-Bohm-Effekt wie folgt beschreiben. Wir wählen $\psi(0)$ und betrachten, wie die Zeitentwicklung vom Magnetfeld abhängt.

Wir interessieren uns für die Amplitude $\psi(x_0, T)$ an einem Punkt x_0 auf dem Schirm. Beim Passieren der Spalte teilt sich die Lösung in zwei Teile ψ_1, ψ_2 mit zunächst disjunktem Träger. Wir können deren weitere Zeitentwicklungen getrennt betrachten, da sie aufgrund der räumlichen Trennung beide $\Delta_{\nabla} \psi_i = i \frac{d}{dt} \psi_i$ lösen müssen. Dann wählen wir lokal θ_1, θ_2 (wir "eichen um"), sodass ∇ oben dem trivialen Zusammenhang bezüglich e^{θ_1} und unten dem bezüglich e^{θ_2} entspricht: $\nabla|_{U_i} = D^{(e^{\theta_i})}$, wobei U_i ($i = 1, 2$) der Bereich über bzw. unter der Spule sei, und in einem Punkt x_1 links der Spule $\theta_1(x_1) = \theta_2(x_1) = 0$ gilt. Dazu wählt man wie im Beweis des Poincaré-Lemmas einen Punkt links der Spule und integriert von dort oben bzw. unten an der Spule vorbei $-\omega$, um θ_i zu erhalten. Mit Proposition 11 folgt $\nabla|_{U_i} = D^{(e^{\theta_i})}$. Seien $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ die entsprechenden Lösungen für $\Delta_D \hat{\psi}_i = i \frac{d}{dt} \hat{\psi}_i$, wo Δ_D der Laplace-Operator zum trivialen Zusammenhang ist, und $\hat{\psi}_i(0) := \psi_i(0)$. Da die Multiplikation mit $e^{-\theta_i}$ dem Rahmenwechsel von μ zu $e^{\theta_i} \mu$ entspricht, gilt $\hat{\psi}_i = e^{-\theta_i} \psi_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi(x_0, T) &= \psi_1(x_0, T) + \psi_2(x_0, T) \\ &= e^{\theta_1(x_0)} \hat{\psi}_1(x_0, T) + e^{\theta_2(x_0)} \hat{\psi}_2(x_0, T) \end{aligned}$$

wobei nach Konstruktion von θ_i gilt

$$\theta_1(x_0) - \theta_2(x_0) = \int_\gamma \omega = \int_{\Omega'} d\omega$$

wobei γ ein beliebiger einfacher geschlossener Weg um die Spule und Ω' das davon eingeschlossene Gebiet ist. Also hängt die relative Phasenverschiebung der beiden Teillösungen nur ab vom Integral über die Krümmung, d.h., dem Magnetfeld, nicht aber davon, welchen Punkt auf dem Schirm man betrachtet.

Dieses Integral beschreibt auch, wie der Paralleltransport vom Weg abhängt: transportiert man $e^{\theta(x_1)}$ (x_1 ein Punkt links der Spule) parallel oben und unten an der Spule vorbei parallel, erhält man einmal $e^{\theta_1(x_0)}$ und einmal $e^{\theta_2(x_0)}$, wie am Ende des letzten Abschnitts dargelegt.

5 Berry-Phase

In der geometrischen Deutung des Aharonov-Bohm-Effekts war die Einsicht entscheidend, dass in der Anwesenheit eines Magnetfelds die für die Bewegung eines geladenen quantenmechanischen Teilchens relevante Geometrie des Raumes verändert wird. Es gibt andere quantenmechanische Effekte, die als Manifestation einer nichttrivialen Geometrie des Konfigurationsraums aufgefasst werden können. Während das Vektorbündel aus dem Aharonov-Bohm-Effekt trivial war, kommen dann auch Vektorbündel vor, die nicht trivialisierbar sind. Hier spielt der *Berry-Zusammenhang* eine große Rolle, der zunächst im Kontext adiabatischer Näherungen auftritt.

Wir betrachten ein Quantensystem mit zeitabhängigem Hamiltonoperator. Genauer betrachten wir eine Mannigfaltigkeit M von Parametern und eine glatte Abbildung $H : M \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($H(p)$ selbstadjungiert und beschränkt für alle p). Wir nehmen an, dass es eine glatte Funktion $E : M \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, sodass $E(p)$ einfacher und vom Rest des Spektrums uniform getrennter Eigenwert von $H(p)$ mit spektraler Projektion $P(p)$ ist, und dass die entsprechenden spektralen Projektionen $P(p)$ als Funktion von p nach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ glatt sind. Sei $\gamma : [0, 1/\epsilon] \rightarrow M$ eine Kurve, welche die Zeitentwicklung des Hamiltonoperators beschreibt, und $\psi_0 \in \text{Bild } P(\gamma(0))$. Wir schreiben $P(t) := P(\gamma(t))$, $H(t) := H(\gamma(t))$. Wir betrachten die adiabatische Entwicklung auf der makroskopischen Zeitskala $t = \epsilon s$, beschrieben durch die Schrödingergleichung

$$i\partial_s \psi^\epsilon(s) = H(\epsilon s) \psi^\epsilon(s)$$

Sei ψ^ϵ eine Lösung. Wir setzen $\eta^\epsilon(t) := \psi^\epsilon(t/\epsilon)$, also

$$i\partial_t \eta^\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} H(t) \eta^\epsilon(t)$$

Nach dem Adiabatentheorem bleibt $\eta^\epsilon(t)$ für kleine ϵ annähernd in $\text{Bild } P(\gamma(t))$. Mit dem Beweis von [Kat50] bleibt die Lösung $\eta_a^\epsilon(t)$ der Gleichung

$$i\epsilon \frac{d}{dt} \eta_a^\epsilon(t) = \left(H(t) - i\epsilon P(t) \dot{P}(t) - i\epsilon(1 - P(t))(1 - \dot{P}(t)) \right) \eta_a^\epsilon(t)$$

mit $\eta_a^\epsilon(0) = \eta^\epsilon(0)$ in $\text{Bild } P(t)$ und es gilt $\|\eta^\epsilon(t) - \eta_a^\epsilon(t)\| = \mathcal{O}(\epsilon t)$ [Teu03]. Sind in einer Umgebung der Kurve γ glatt von x abhängende Einheitsvektoren $\phi(x) \in \text{Bild } P(x)$ vorgegeben, dann folgt

$$\begin{aligned} \eta_a^\epsilon(t) &= \exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \int_0^t E(\gamma(s)) ds\right) \exp\left(-\int_0^t \langle \phi(t) | \dot{\phi}(t) \rangle dt\right) \phi(\gamma(t)) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \int_0^t E(\gamma(s)) ds\right) \exp\left(-\int_\gamma \sum_i \langle \phi(\gamma) | \partial_i \phi(\gamma) \rangle dx^i\right) \phi(\gamma(t)) \end{aligned}$$

indem man diesen Ausdruck nach t ableitet und mit der obigen Gleichung vergleicht:

$$\begin{aligned}
& \left(H - i\epsilon P\dot{P} - i\epsilon(1-P)(1-\dot{P}) \right) \exp(\dots)\phi \\
&= \left(E - 2i\epsilon P\dot{P} - i\epsilon + i\epsilon P + i\epsilon\dot{P} \right) \exp(\dots)\phi \\
&= \exp(\dots) \left(E|\phi\rangle - 2i\epsilon|\phi\rangle\langle\phi|\dot{\phi}\rangle - 2i\epsilon|\phi\rangle\langle\dot{\phi}|\phi\rangle - i\epsilon|\phi\rangle + i\epsilon|\phi\rangle + i\epsilon|\dot{\phi}\rangle + i\epsilon|\phi\rangle\langle\dot{\phi}|\phi\rangle \right) \\
&= \exp(\dots) \left(E|\phi\rangle + i\epsilon|\dot{\phi}\rangle - i\epsilon|\phi\rangle\langle\phi|\dot{\phi}\rangle \right) \\
&= i\epsilon \frac{d}{dt} \left(\exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \int_0^t E(\gamma(s)) ds\right) \exp\left(-\int_0^t \langle\phi(t)|\dot{\phi}(t)\rangle dt\right) \phi(\gamma(t)) \right)
\end{aligned}$$

Ist γ injektiv, lässt sich der zweite Phasenfaktor, die *Berry-Phase*, unabhängig von $E(x)$ durch geeignete Wahl von $\phi(x)$ eliminieren. Ist die Kurve γ aber geschlossen, ist dies i.A. nicht möglich. Da sich dann $\eta^\epsilon(0)$ und $\eta^\epsilon(1)$ fast nur durch einen Phasenfaktor unterscheiden, lässt sich der zweite Phasenfaktor messen und hat physikalische Bedeutung [Ber84]. Er hat eine natürliche geometrische Deutung [Sim83]. Dazu betrachten wir

$$E := \{(x, \psi) | x \in M, \psi \in \text{Bild } P(x)\}$$

wobei M wieder die Mannigfaltigkeit der Parameter ist. Wir wollen E zu einem \mathbb{C} -Linienbündel über M machen. Nach Annahme hängt $P(p)$ glatt von p ab. Bei gegebenem p_0 muss es ein $\psi \neq 0$ mit $P(p_0)\psi \neq 0$ geben, und da $P(p)\psi$ stetig in p ist, muss $P(p)\psi$ in einer Umgebung U von p_0 ungleich Null sein und damit einen lokalen Rahmen von E bilden. Damit erhält man lokale Trivialisierungen $\Psi^\alpha : (p, \lambda P(p)\psi_\alpha) \mapsto (p, \lambda)$. Der Wechsel $\Psi^\alpha \circ (\Psi^\beta)^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C} \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}$ ist glatt:

$$(\Psi^\alpha \circ (\Psi^\beta)^{-1})(p, \lambda) = \Psi^\alpha(p, \lambda P(p)\psi_\beta) = \left(p, \lambda \frac{P(p)\psi_\beta}{P(p)\psi_\alpha}\right)$$

Durch Hinzuschalten von Karten von M in der ersten Komponente liefern diese Trivialisierungen damit einen glatten Atlas von E , bezüglich dem die Trivialisierungen Ψ^α Diffeomorphismen sind.

Ist \mathcal{H} endlichdimensional, ist $M \times \mathcal{H}$ ein Vektorbündel im Sinne unserer Definition und die orthogonale Projektion $P : M \times \mathcal{H} \rightarrow E : (p, \xi) \mapsto (p, P(p)\xi)$ ist ein glatter surjektiver Vektorbündelhomomorphismus, da in einer lokalen Trivialisierung gilt: $\Psi^\alpha(P(p, \xi)) = \Psi^\alpha((p, P(p)\xi)) = \left(p, \frac{P(p)\xi}{P(p)\psi_\alpha}\right)$. Die Mannigfaltigkeitsstruktur, mit der wir E versehen haben, ist genau die von der Obermenge $M \times \mathcal{H}$ induzierte Struktur einer Untermannigfaltigkeit. Da auch die Projektionen und Vektorraumstrukturen kompatibel sind, kann E als Untervektorbündel von $M \times \mathcal{H}$ aufgefasst werden.

$M \times \mathcal{H}$ hat als natürlichen Zusammenhang die Ableitung, auch dann, wenn \mathcal{H} unendlichdimensional ist. Vermittels der orthogonalen Projektion $P : M \times \mathcal{H} \rightarrow E : (p, \xi) \mapsto (p, P(p)\xi)$ induziert dieser Zusammenhang einen Zusammenhang auf E :

Proposition 15. $\hat{D} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}(TM, E))$ gegeben durch $\hat{D}_v\phi := P(D_v\phi)$ ist ein Zusammenhang auf E , und es gilt für einen (lokalen) Rahmen ϕ von E : $\hat{D} = D^{(\phi)} + \langle\phi|D_v\phi\rangle$.

Beweis. $D^{(\phi)}\psi + \langle \phi | D \cdot \phi \rangle$ ist ein Zusammenhang auf E . Aufgrund von $\hat{D}_v \phi = PD_v \phi = \langle \phi | D_v \phi \rangle \phi$ ist er gleich \hat{D} . □

Die Zusammenhangsform des induzierten Zusammenhangs auf E bezüglich $D^{(\phi)}$ ist also genau durch den Integranden aus der Berry-Phase gegeben. Der Zusammenhang heißt *Berry-Zusammenhang*. Gilt $E(\gamma(t)) \equiv 0$, dann ist $\eta_a^\epsilon(1) = \exp\left(-\int_\gamma \langle \phi | D_v \phi \rangle\right) \phi(\gamma(1))$. Wie am Ende von Abschnitt 3 dargelegt, entspricht die adiabatische Entwicklung damit in diesem Fall dem Paralleltransport entlang dem Berry-Zusammenhang. Mit Stokes ist der Exponent aus der Berry-Phase das Integral über die Krümmung des Berry-Zusammenhangs in dem von γ eingeschlossenen Gebiet der Parametermannigfaltigkeit.

Bemerkung 16. Ist \mathcal{H} endlichdimensional, folgt die Glattheit von $E(p)$ und $P(p)$ aus der Annahme, dass H glatt ist und $E(p)$ einfach und vom Rest des Spektrums getrennt ist: Als Nullstelle des charakteristischen Polynoms bildet $E(p)$ nach dem Satz über implizite Funktionen eine glatte Funktion, da $E(p)$ ein einfacher Eigenwert und somit keine Nullstelle der Ableitung des charakteristischen Polynoms ist. Beispielsweise mit der Definition des holomorphen Funktionalkalküls für Matrizen ist dann auch $P(p)$ glatt.

6 Piezo-Strom

Im Folgenden werden wir zwei Beispiele geometrischer Effekte in der Festkörperphysik vorstellen, in deren theoretischer Beschreibung der Berry-Zusammenhang eine Rolle spielt: den Piezo-Strom und den Quanten-Hall-Effekt.

Bei elastischer Verformung einiger Festkörper, sog. piezoelektrischer Materialien, entsteht eine elektrische Spannung. [KSV93] haben für den Unterschied in der Polarisation bei einer Verformung von $t = 0$ bis $t = 1$ die Formel

$$\Delta P_i = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{m=0}^M \int_{\mathbb{T}^*} dk (\mathcal{A}_{m,i}(k, 1) - \mathcal{A}_{m,i}(k, 0))$$

hergeleitet, wobei die Summe über alle belegten Blochbänder geht, d die Raumdimension ist, \mathbb{T}^* die erste Brillouin-Zone ist, und

$$\mathcal{A}_{m,i}(k, t) = i \langle \chi_m(k, t), \partial_{k_i} \chi_m(k, t) \rangle_{L^2(Y)}$$

die dk^i -Komponente der Berry-Zusammenhangsform zum m -ten Blochband zur Zeit t in einem geeigneten Rahmen ist. Im Folgenden werden wir skizzieren, wie nach [PST09] und [SBT13] diese Formel aus einem adiabatischen Limes gewonnen werden kann. Wir werden nur versuchen, die groben Ideen und den Bezug zur Geometrie des Berry-Zusammenhangs darzustellen, für die genauen Beweise verweisen wir auf diese Arbeiten.

Modell Wir betrachten ein Gas unendlich vieler Elektronen ohne Interaktion und modellieren die Verformung als langsam verändertes periodisches Potential:

$$H(t) := -\frac{1}{2} \Delta + V(t)$$

sodass $V(t)$ zu allen Zeiten Δ -beschränkt mit Schranke < 1 und hinreichend regulär ist [PST09, 393]. Das *Gitter* ist $\Gamma = \{\sum_i \zeta_i \gamma_i : \zeta_i \in \mathbb{Z}\}$, wobei γ_i die Erzeuger des Gitters sind. Dabei ist V bezüglich Γ periodisch: $V(x + \gamma, t) = V(x, t) \forall x \in \mathbb{R}^d, \gamma \in \Gamma, t \in I$. Der *Fundamentbereich* ist $Y = \{\sum_i \zeta_i \gamma_i : \zeta_i \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$. Das *reziproke Gitter* Γ^* ist das Gitter der k mit $\forall r \in \Gamma : k \cdot r \in \mathbb{Z}$. Die *erste Brillouin-Zone* Y^* ist der Fundamentbereich zu Γ^* . Wir schreiben $\mathbb{T}^* := \mathbb{R}^d / \Gamma^*$, d.h. die erste Brillouin-Zone mit periodischen Randbedingungen.

Wir betrachten wieder die adiabatische Entwicklung auf der makroskopischen Zeitskala $t = \epsilon s$. Der Strom ist gegeben durch $J^\epsilon := -\frac{i}{\epsilon} \nabla_x$. Für einen Operator A definieren wir – falls der Ausdruck existiert – die Spur pro Einheitsvolumen:

$$\mathcal{T}(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \text{Re Tr}(1_{\Lambda_n} A)$$

wobei Λ_l eine aufsteigende Folge von Würfeln um den Ursprung ist, deren Vereinigung ganz \mathbb{R}^d ist. Der makroskopische Piezostrom ist dann definiert durch $\dot{P}^\epsilon(t) := \mathcal{T}(\rho^\epsilon(t) J^\epsilon)$, wobei $\rho^\epsilon(t) = U^\epsilon(t, 0) \chi_{(-\infty, E_*]}(H(0)) U^\epsilon(t, 0)^*$ ist, wo U^ϵ der Propagator zu H ist.

Daraus ergibt sich die makroskopische Polarisation pro Flächeneinheit:

$$\Delta \mathbf{P}^\epsilon = \int_0^T \mathcal{T}(\rho^\epsilon(t) J^\epsilon) dt$$

Für diese Größe werden wir die oben angegebene Kingsmith-Vanderbilt-Formel zeigen.

Bloch-Floquet-Darstellung Wir betrachten als Konfigurationsraum statt $L^2(\mathbb{R}_x^d)$ nun $L^2(Y_k^*, |Y^*|^{-1} dk) \otimes L^2(\mathbb{T}_y^d)$ mittels der unitären Bloch-Floquet-Zak-Transformation:

$$\mathcal{Z} : L^2(\mathbb{R}_x^d) \cong l^2(\Gamma) \otimes L^2(Y) \rightarrow L^2(Y_k^*, |Y^*|^{-1} dk) \otimes L^2(\mathbb{T}_y^d)$$

$$(\mathcal{Z}\psi)(k, y) := e^{-iyk} (\mathcal{F} \otimes 1\psi)(k, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-i(y+\gamma)k} \psi(y + \gamma)$$

für $k \in Y^*, y \in \mathbb{R}^d$. Es gilt

$$(\mathcal{Z}H(t)\mathcal{Z}^{-1}\psi)(k, y) = (H(k, t)\psi(k))(y)$$

wobei

$$H(k, t) = 1/2(-i\nabla_y + k)^2 + V_\Gamma(y, t)$$

Dabei fassen wir ψ als Element des Lebesgue-Bochner-Raums $L^2(Y_k^*, L^2(\mathbb{T}_y^d))$ auf. Man schreibt $\mathcal{Z}H(t)\mathcal{Z}^{-1} = \int_{Y^*}^\oplus dk H(k, t)$ und sagt, $\mathcal{Z}H(t)\mathcal{Z}^{-1}$ sei gefasert [RS78, IV 283]. $H(k, t)$ hat reines Punktspektrum. Die Eigenwerte $E_n(k, t)$ als Funktionen von n und t heißen *Blochbänder*. Wir betrachten nur die M niedrigsten Blochbänder, wobei wir annehmen dass diese einfache Eigenwerte sind und vom Rest des Spektrums durch eine stetige Funktion getrennt sind. Setze $P(k, t) := \sum_{m=0}^M P_m(k, t)$.

Ist $P(k, t)$ glatt, dann ist $E_t := \{(k, x) : k \in \mathbb{T}^* = Y^*, x \in \text{Bild } P(k, t)\}$ ein Vektorbündel über \mathbb{T}^* , das *Blochbündel* zur Zeit t . Dies lässt sich analog

zum Linienbündel E aus dem letzten Abschnitt zeigen, wobei nun m linear unabhängige Vektoren ψ_i gewählt werden müssen, für die die Vektoren $P(k_0, t)\psi_i$ für $i = 1, \dots, m$ linear unabhängig sind, was aufgrund der Stetigkeit der Determinante möglich ist. Ist das m -te Blochband isoliert, ist $E_t^{(m)} := \{(k, x) : k \in \mathbb{T}^* = Y^*, x \in \text{Bild } P_m(k, t)\}$ auch ein Linienbündel über \mathbb{T}^* , das m -te Blochbündel. Wie wir sehen werden, besteht der Ausdruck $\mathcal{A}_m(k, t)$ aus der Kingsmith-Vanderbilt-Formel aus den Komponenten der Zusammenhangsform des Berry-Zusammenhangs von $E_t^{(m)}$ zu einem geeigneten Rahmen.

Berechnung von $\Delta \mathbf{P}$ Sei U^ϵ der Propagator der Schrödingergleichung und $\rho^\epsilon(k, t) := U^\epsilon(k, t)P(k, 0)U^\epsilon(k, t)^*$. Für die Herleitung der Formel ist folgendes superadiabatische Theorem [PST09, Proposition 2] wichtig:

Satz 17. Für jede isolierte Familie von Blochbändern und jedes N gibt es eine Familie von Projektionen $P_N^\epsilon(k, t)$ mit $P_N^\epsilon(k, 0) = P(k, 0)$, $P_N^\epsilon(k, T) = P(k, T)$, $\|P_N^\epsilon(k, t) - \rho^\epsilon(k, t)\| = \mathcal{O}(\epsilon^N)$.

Die Projektionen P_N^ϵ approximieren also einerseits die Zeitentwicklung und andererseits sind sie zu Anfang und Ende des Zeitintervalls gleich der spektralen Projektion. Es gilt $\mathcal{Z}J^\epsilon\mathcal{Z}^{-1} = \frac{1}{\epsilon}(-i\nabla_y + k)$. Damit lässt sich zeigen (siehe PST09, 410):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{P}^\epsilon &= i \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^*} dk \operatorname{tr}(\rho^\epsilon(k, t)(\mathcal{Z}J^\epsilon\mathcal{Z}^{-1})(k)) \\ &= i \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^*} dk \operatorname{tr}(P^\epsilon(k, t)[\partial_t P^\epsilon(k, t), \nabla_k P^\epsilon(k, t)]) + \mathcal{O}(\epsilon^N) \end{aligned}$$

Setze

$$\Theta(k, t) := -i \operatorname{tr}(P(k, t)[\partial_t P(k, t), \nabla_k P(k, t)])$$

und analog $\Theta_N^\epsilon(k, t)$ mit P_N^ϵ und $\Theta^{(m)}$ mit P_m . Nun gibt es eine glatte Orthonormalbasis $(\chi_\alpha(k, t))_{\alpha=1}^M$ von $\text{Bild } P(k, t) \subset L^2(\mathbb{T}_y^d)$ mit $\langle \chi_\alpha(k, t), \partial_t \chi_\beta(k, t) \rangle = 0$ und $\chi_\alpha(k, t)(y) = e^{i\gamma^* \cdot y} \chi_\alpha(k + \gamma, t)(y) \forall \gamma^* \in \Gamma^*$ (Äquivarianz). Entsprechend gibt es auch eine solche Orthonormalbasis $\chi_\alpha^\epsilon(k, t)$ von $\text{Bild } P^\epsilon(k, t)$ mit $\chi_\alpha(k, 0) = \chi_\alpha^\epsilon(k, 0)$, $\chi_\alpha(k, T) = \chi_\alpha^\epsilon(k, T)$ [PST09, Lemma 4]. Wertet man die Spuren in den Definitionen von Θ , Θ_N^ϵ bezüglich dieser Orthonormalbasen aus, erhält man

$$\Theta(k, t) = 2i \sum_{\alpha} \operatorname{Im} \langle \partial_t \chi_\alpha(k, t), \nabla_k \chi_\alpha(k, t) \rangle$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k, t) &:= i \sum_m \langle \chi_m(k, t), \nabla_k \chi_m(k, t) \rangle_{L^2(Y)} \\ \phi(k, t) &:= -i \sum_m \langle \chi_m(k, t), \partial_t \chi_m(k, t) \rangle_{L^2(Y)} \end{aligned}$$

und entsprechend $\mathcal{A}_N^\epsilon(k, t)$, $\phi_N^\epsilon(k, t)$, dann gilt

$$\Theta(k, t) = -\partial_t \mathcal{A}(k, t) - \nabla_k \phi(k, t)$$

Die analogen Überlegungen gelten auch für Θ_N^ϵ mit entsprechend definiertem \mathcal{A}_N^ϵ und ϕ_N^ϵ . Damit ist:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{P}^\epsilon &= - \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^*} dk \Theta_N^\epsilon(k, t) + \mathcal{O}(\epsilon^N) \\ &= \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^*} dk (\partial_t \mathcal{A}_N^\epsilon(k, t) + \nabla_k \phi_N^\epsilon(k, t)) + \mathcal{O}(\epsilon^N) \\ &=^{(1)} \int_{\mathbb{T}^*} dk (\mathcal{A}_N^\epsilon(k, T) - \mathcal{A}_N^\epsilon(k, 0)) + \mathcal{O}(\epsilon^N) \\ &=^{(2)} \int_{\mathbb{T}^*} dk (\mathcal{A}(k, T) - \mathcal{A}(k, 0)) + \mathcal{O}(\epsilon^N) \\ &= - \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^*} dk \Theta(k, t) + \mathcal{O}(\epsilon^N) \end{aligned}$$

Dabei folgt (1), da $\phi_N^\epsilon(k, t)$ aufgrund der Äquivarianz von χ_α^ϵ in k periodisch ist. (2) folgt daraus, dass nach Annahme bei $t = 0, 1$ die Ableitungen von H alle verschwinden.

Im Fall, dass sich keine Bänder überkreuzen, liegen $\chi_m(k, t) \in \text{Bild } P_m(k, t)$ und $\mathcal{A}(k, t)$ ist die Summe der Zusammenhangsformen für die Blochbänder, und es ergibt sich die eingangs genannte Kingsmith-Vanderbilt-Formel.

Periodische Verformung Der Ausdruck Θ ist zwar nicht die Krümmung zu \mathcal{A} , lässt sich aber als Teil einer Berry-Krümmungsform schreiben. Wir nehmen an, dass sich keine Bänder überkreuzen und betrachten das m -te *erweiterte Blochbündel* über $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$, dessen Faser bei (k, t) das Bild von $P_m(k, t)$ ist. Die Krümmung des induzierten Zusammenhangs ist die 2-Form mit den Komponenten $(\mu, \nu = 0, \dots, 3)$

$$\Xi_{\mu, \nu}^{(m)} = i \operatorname{tr}(P_m(k, t) [\partial_\mu P_m(k, t), \partial_\nu P_m(k, t)])$$

denn

$$\begin{aligned} &i \operatorname{tr}(P_m(k, t) [\partial_\mu P_m(k, t), \partial_\nu P_m(k, t)]) \\ &= i \langle \chi | \partial_\mu \chi \rangle \langle \chi | \partial_\nu \chi \rangle + i \langle \partial_\mu \chi | \partial_\nu \chi \rangle + i \langle \chi | \partial_\mu \chi \rangle \langle \partial_\nu \chi | \chi \rangle + i \langle \partial_\mu \chi | \chi \rangle \langle \partial_\nu \chi | \chi \rangle \\ &\quad - i \langle \chi | \partial_\nu \chi \rangle \langle \chi | \partial_\mu \chi \rangle - i \langle \partial_\nu \chi | \partial_\mu \chi \rangle - i \langle \chi | \partial_\nu \chi \rangle \langle \partial_\mu \chi | \chi \rangle - i \langle \partial_\nu \chi | \chi \rangle \langle \partial_\mu \chi | \chi \rangle \\ &= 2i \operatorname{Im} \langle \partial_\mu \chi | \partial_\nu \chi \rangle + 2i \operatorname{Im} \langle \chi | \partial_\mu \chi \rangle \langle \partial_\nu \chi | \chi \rangle \\ &= 2i \operatorname{Im} \langle \partial_\mu \chi | \partial_\nu \chi \rangle \\ &= (d\omega)(\partial x_\mu, \partial x_\nu) \end{aligned}$$

Dann gilt $\Theta_j^{(m)}(k, t) = -\Xi_{j,0}^{(m)}(k, t)$. Verläuft die Verformung periodisch, also $V_\Gamma(\cdot, t+T) = V_\Gamma(\cdot, t) \forall t$, dann kann als Basismannigfaltigkeit des erweiterten Blochbündels $\mathbb{T}^* \times \mathbb{T}_t^1$ betrachtet werden. Betrachten wir nun z.B. die Untermannigfaltigkeit $M' := \mathbb{T}_{k_3}^1 \times \mathbb{T}_t^1$, dann ist $\Theta_3(k, t)$ die Krümmung der Einschränkung des Bündels auf M' und

$$c_3^{(m)} := \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^1} dk_3 \Theta_3^{(m)}(k, t)$$

ist ein ganzzahliges Vielfaches von 2π , wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden. Da es stetig von k_1, k_2 abhängt, muss es auch konstant sein.

Dies trifft aber auch auf $\int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^d} dk_3 \Theta_3^{(m)}(k, t)$ zu. Aufgrund von $(\Theta^{(m)})_N^\epsilon(k, t) = \Theta^{(m)}(k, t) + \mathcal{O}(\epsilon^N)$ müssen die beiden Zahlen gleich sein, wenn ϵ klein genug ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} \Delta P^\epsilon &= - \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^*} dk (\Theta^{(m)})_N^\epsilon(k, t) + \mathcal{O}(\epsilon^N) \\ &= - \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^*} dk \Theta^{(m)}(k, t) + \mathcal{O}(\epsilon^N) \end{aligned}$$

auch bei periodischen Deformationen, auch wenn \dot{H} bei $t = 0, 1$ nicht verschwindet. Also gilt

$$(\Delta P^\epsilon)_3 = -\frac{1}{2\pi} c_3^{(m)} + \mathcal{O}(\epsilon^N)$$

und die makroskopische Polarisation ist quantisiert. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass c_3 tatsächlich eine ganzzahlige Vielfaches von $2\pi i$ ist. Dieses Ergebnis werden wir dann auch anwenden, um die Quantisierung des Stroms im Quanten-Hall-Effekt herzuleiten.

7 Die Chernzahl eines komplexen Linienbündels

Das Integral über die Spur der Krümmung eines Zusammenhangs auf einem Vektorbündel über einer zweidimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit heißt *Chernzahl*. Wir werden in diesem Abschnitt für komplexe Linienbündel zeigen, dass sie eine ganze Zahl ist und nicht vom Zusammenhang abhängt. Dieses Resultat (Che46, Theorem 11, Gri62, Proposition 2) ist eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Gauss-Bonnet.

Satz 18 (Version des Satzes von Gauss-Bonnet). Sei E komplexes Linienbündel mit Zusammenhang ∇ über einer zweidimensionalen kompakten orientierten Mannigfaltigkeit M . Dann ist

$$\frac{i}{2\pi} \int_M R^\nabla$$

eine ganze Zahl, die *Chernzahl*, und von ∇ unabhängig.

Ist das Bündel trivialisierbar, dann ist R^∇ geschlossen, da es als Ableitung einer globalen Zusammenhangsform geschrieben werden kann, und die Chernzahl ist 0. Für nichttriviale Bündel muss die Chernzahl dagegen nicht unbedingt verschwinden.

Die Beweisidee besteht darin, einen Schnitt zu konstruieren, der bis auf endlich viele Punkte nicht verschwindet, und zu zeigen, dass die Zahl der Nullstellen, auf geeignete Weise gezählt, dem Integral der Krümmung entspricht. Mit

der gleichen Idee lässt sich der Satz noch deutlich allgemeiner beweisen, wir benötigen aber nur diese Aussage.

Eine *Triangulation* einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ist eine Aufteilung in endlich viele 2-Simplizes, d.h. diffeomorphe Kopien eines Dreiecks, sodass M die Vereinigung der Simplizes ist und der Durchschnitt zweier Simplizes entweder leer ist, oder eine Ecke beider Simplizes, oder eine Seite beider Simplizes ist. Jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit hat eine Triangulation [Spi79].

Wir betrachten das *Rahmenbündel* $P_E := E \setminus \{(x, 0) : x \in M\}$, d.h. E ohne die Null in jeder Faser. Als offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist P_E wieder eine Mannigfaltigkeit, und lokal diffeomorph zu $U \times \mathbb{C}^*$ ($U \subset M$ offen). Ein (lokaler) *Schnitt* von P_E ist ein (lokaler) Schnitt von E , der ganz in P_E liegt, also ein (lokaler) Rahmen von E . P_E hat einen globalen Schnitt genau dann, wenn E trivialisierbar ist.

Damit können wir Satz 18 beweisen:

Beweis von Satz 18. Sei θ die (lokal definierte) Form eines Zusammenhangs auf E , $\Theta := d\theta$ die (global definierte) Krümmung. Ist U lokale Umgebung mit $P|_U \cong U \times \mathbb{C}^*$, setze $\omega|_U \in \Omega^1(U \times \mathbb{C}^*) := d \log z + \pi^*(\theta|_U)$, wobei z die Koordinate der \mathbb{C}^* -Komponente sei und $\pi : P_E \rightarrow M$ die Einschränkung der Projektion von E . Dann ist $\Omega := d\omega = \pi^*(d\theta)$ global definiert.

Trianguliere $M = s_1^2 \cup \dots \cup s_l^2$. Da M kompakt ist, kann die Triangulation so gewählt werden, dass für jeden 2-Simplex s_i^2 die Einschränkung des Rahmenbündels trivial ist. Es gibt einen glatten Schnitt $\rho : (\cup_j \partial(s_j^2)) \rightarrow P_E$ auf den Rändern der Simplizes: Entlang einer Kurve findet man immer einen Rahmen. Da es endlich viele Ecken gibt und \mathbb{C}^* zusammenhängend ist, kann man die Rahmen entlang der Kurven dann so abändern, dass ρ auch an den Ecken glatt ist. Damit haben wir für jedes s_j^2 eine geschlossene Kurve $\rho : \partial(s_j^2) \rightarrow \mathbb{C}^*$. Wir bezeichnen mit δ_j die Windungszahl von $\rho : \partial(s_j^2) \rightarrow \mathbb{C}^*$ bezüglich 0, wobei die Orientierung von $\partial(s_j^2)$ die von der Orientierung von M induzierte ist.

Wir wollen zeigen:

$$\sum_i \delta_i = \frac{1}{2\pi i} \int_M \Theta$$

Für jedes j kann ρ auf ganz s_j^2 mit Ausnahme (höchstens) eines Punktes $p_j \in s_j^2$ fortgesetzt werden, indem man einen Punkt im Innern wählt und ρ radial konstant vom Rand ins Innere fortsetzt. Wähle hinreichend kleine offene Kreisscheiben $D_j^{(1)} \supset D_j^{(2)} \supset \dots$ mit $\bigcap_n D_j^{(n)} = \{p_j\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_M \Theta &= \sum_j \int_{s_j^2} \Theta \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_j \int_{s_j^2 - D_j^{(n)}} \Theta \\ &=^{(1)} \sum_j \int_{s_j^2 - D_j^{(n)}} d\rho^* \omega \\ &= \sum_j \int_{\partial(s_j^2 - D_j^{(n)})} \rho^* \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_j \int_{\partial(s_j^2)} \rho^* \omega - \sum_l \int_{\partial D_l^{(n)}} \rho^* \omega \\
&\stackrel{(2)}{=} \sum_l \int_{\rho(\partial(D_l^{(n)}))} \omega \\
&= \sum_l \int_{\rho(\partial(D_l^{(n)}))} z^{-1} dz + \int_{\pi(\rho(\partial(D_l^{(n)})))} \theta \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \stackrel{(3)}{\sum_l} (2\pi i) \delta_l
\end{aligned}$$

Dabei folgt (1) aus $\Theta = \rho^* \pi^* \Theta = \rho^* \Omega = d\rho^* \omega$, (2) aus $\partial M = \emptyset$, und (3) aus der Definition der Windungszahl sowie daraus, dass die Kurven $\rho(\partial(D_l^{(n)}))$ in \mathbb{C}^* für verschiedene n je homotop zu $\rho(\partial s_l^2)$ sind. Das Integral über θ fällt dabei weg, weil θ in ganz s_j^2 glatt definiert ist und somit das Integral für kleine $D_l^{(n)}$ klein wird. □

8 Quanten-Hall-Effekt

Wir werden nun zeigen, wie dieses Resultat zum Verständnis des Quanten-Hall-Effekts beiträgt. Man betrachtet einen Halbleiter, in dem sich Elektronen zwei-dimensional bewegen können. An ihm ist eine Spannung V angelegt. Ausserdem ist ein starkes Magnetfeld senkrecht zu dieser Ebene angelegt. Dann zeigt sich, dass ein Strom durch die Ebene einen Widerstand hat, der quantisiert von V abhängt:

$$\rho = \frac{V}{I} = \frac{h}{e^2 p}, \text{ wobei } p \in \mathbb{N}$$

Wir skizzieren, wie nach [ST13] die Quantisierung der Widerstände hergeleitet werden kann. Wieder verweisen wir auf diese Arbeit für die genauen Formulierungen und Beweise. Ausgangspunkt ist das semiklassische Modell der Elektronendynamik in der Festkörperphysik [AM76]. Dieses modelliert Elektronen als klassische Teilchen mit Ort r und Impuls k . Es wird angenommen, dass sich ein Elektron in einem Blochband befindet und in diesem bleibt. Die Bewegungsgleichungen werden dann durch das Blochband $e^{(j)}$ des Elektrons bestimmt:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \partial_k e^{(j)}(k) \\
\dot{k} &= -\mathcal{E}(r, t) - \dot{r} \times b(r, t)
\end{aligned}$$

wobei \mathcal{E} und b elektrisches und magnetisches Feld sind und wir $c = \hbar = e = 1$ schreiben.

[ST13] zeigen, wie das semiklassische Modell als adiabatische Näherung hergeleitet werden kann. Dabei wird dem Hamiltonoperator H zunächst ein klassisches System mit Hamiltonfunktion h und symplektischer Form ω zugeordnet. Aus Funktionen f auf dessen Phasenraum entstehen mit der Weyl-Quantisierung

Operatoren \hat{f} , welche die korrespondierenden Operatoren des quantenmechanischen Systems auf dem Bild von Π^ϵ , einem unter H fast invariantem Unterraum, approximieren. Das ursprüngliche Modell liefert nur Approximationen bis auf $\mathcal{O}(\epsilon)$. Approximationen bis auf $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ erhält man mit einem klassischen System, das auch die Krümmung $\Omega^{(j)}$ des Berry-Zusammenhangs zum n -ten Blochbündel berücksichtigt. Es ergibt sich die modifizierte Gleichung

$$\dot{r} = \partial_k e^{(j)}(k) - \epsilon \dot{k} \times \Omega^{(j)}(k)$$

wobei nun aber (r, k) keine kanonischen Koordinaten sind, da die symplektische Form auf der Diagonalen Terme $-\epsilon\Omega$ enthält.

Für die Modellierung des Quanten-Hall-Effekts betrachten wir ein Gas von Elektronen ohne Interaktion auf dem Gitter \mathbb{Z}^2 und nehmen an, dass ein konstantes Magnetfeld $B \in \mathbb{R}$ und ein konstantes elektrisches Feld $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^2$ angelegt sind. Ist das Magnetfeld $B_0 = 2\pi\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, q ungerade, sind das Magnetfeld und das Gitter kommensurabel und der zugehörige Hamiltonoperator H^{B_0} ist gefasert, und die Blochbänder sind periodisch. Damit kann das klassische System auf dem Phasenraum $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{T} := [0, 2\pi/q)^2$ definiert werden. Andere Magnetfelder B fassen wir nun als Störung $B = B_0 + \epsilon b$ eines solchen $B_0 = 2\pi\frac{p}{q}$ auf. [ST13] zeigen, dass in diesem Fall ihre adiabatische Näherung anwendbar ist und es ergeben sich die Gleichungen des semiklassischen Modells

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \partial_k (e^{(j)}(k) + \epsilon b M^{(j)}(k)) - \epsilon \Omega^{(j)}(k) \dot{k} \\ \dot{k} &= -\mathcal{E} + \mathbf{b} \dot{r} \end{aligned}$$

mit der symplektischen Form

$$\omega_\epsilon^{(j)}(k) = \begin{pmatrix} -\mathbf{b} & E_2 \\ -E_2 & \epsilon \Omega^{(j)}(k) \end{pmatrix}$$

wobei $M^{(j)}$ das effektive magnetische Moment der Teilchen im j -ten Band beschreibt und $\Omega^{(j)} = \Omega^{(j)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist, und entsprechend \mathbf{b} . Das zugehörige Liouvillemass ist $d\lambda_\epsilon^{(j)} = (1 + \epsilon \Omega^{(j)}(k)) dr dk$.

Sei χ_n glatte Approximationen an die charakteristische Funktion von $\Lambda_n := [-n, n]^2$, d.h. $\chi_n \in S^0(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \chi_n \subset \Lambda_n$, $\chi_n|_{\Lambda_{n-1}} \equiv 1$. Die relevanten Zustände werden wieder beschrieben durch $\Pi^\epsilon = \sum_{j=1}^m \Pi^{(j)}$. Der Operator $\Pi_n^\epsilon := \Pi^\epsilon \chi_n(\epsilon x) \Pi^\epsilon$ beschreibt die Lokalisierung des Zustandes auf das Gebiet $\epsilon^{-1}\Lambda_n$. Die Stromdichte ist wieder

$$j := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon^2}{\|\chi_n\|_{L^1}} \text{tr}_{l^2(Z^2)} (\Pi^\epsilon \chi_n(\epsilon x) \Pi^\epsilon J^\epsilon)$$

wobei der Strom wieder $J^\epsilon := \frac{i}{\epsilon} [H^B, \hat{r}]$ ist. Auf dem Bild von Π^ϵ wird der Strom durch $\widehat{\{h, r\}}_{\omega_\epsilon} = \widehat{\hat{r}}$ bis auf $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ approximiert (Proposition 3 in ST13). Die Spur wird im semiklassischen Modell durch ein Integral über den Phasenraum approximiert:

Satz 19 (siehe ST13, Theorem 1). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Observable (beide hinreichend regulär). Dann gilt:

$$\text{tr}_{\mathcal{H}} (\Pi^\epsilon f(\hat{H}) \hat{a}) = \frac{1}{(2\pi\epsilon)^n} \left(\int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2} d\lambda_\epsilon f(h(q, p)) a(q, p) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right)$$

wobei λ_ϵ das Liouvillemass zu ω_ϵ ist.

Unter der Annahme, dass es eine Konstante μ mit $e^{(m)} < \mu < e^{(m+1)}$ gibt, folgt daraus:

$$\begin{aligned} \text{tr}_{L^2(Z^2)}(\Pi^\epsilon \chi_n(\epsilon x) \Pi^\epsilon J^\epsilon) &= \frac{q}{(2\pi\epsilon)^2} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2} d\lambda_\epsilon^{(j)} \chi_n(r) \dot{r} + \mathcal{O}(\epsilon^2 \|\chi_n\|_{L_1}) \\ &= \frac{q}{(2\pi\epsilon)^2} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{T}} dk \int_{\mathbb{R}^2} dr \chi_n(r) (\partial_k(e^{(j)}(k) + \\ &\quad \epsilon bM^{(j)}(k)) - \epsilon \Omega^{(j)}(k) \mathcal{E}) + \mathcal{O}(\epsilon^2 \|\chi_n\|_{L_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon^2}{\|\chi_n\|_{L_1}} \left(\frac{q}{(2\pi\epsilon)^2} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{T}} dk \int_{\mathbb{R}^2} dr \chi_n(r) (\partial_k(e^{(j)}(k) + \right. \\ &\quad \left. \epsilon bM^{(j)}(k)) - \epsilon \Omega^{(j)}(k) \mathcal{E}) + \mathcal{O}(\epsilon^2 \|\chi_n\|_{L_1}) \right) \\ &= \frac{q}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{T}} dk (\partial_k(e^{(j)}(k) + \epsilon bM^{(j)}(k)) - \epsilon \Omega^{(j)}(k) \mathcal{E}) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ &= -\frac{q}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{T}} \Omega^{(j)}(k) \mathcal{E} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ &= \mathcal{E}^\perp \frac{q}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{T}} \Omega^{(j)}(k) dk + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{aligned}$$

wobei der erste Teil des Integrals im Ausdruck für j wegen Stokes Null ist.

Damit ergibt sich die Quantisierung des Hallstroms: der Integrand ist die Chernzahl des j -ten Blochbands bei Magnetfeld B_0 und nach Satz 18 ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.

Damit haben wir auch ein Beispiel für natürlich auftretende Linienbündel, die nicht trivialisierbar sind: wären die Blochbündel im Quanten-Hall-Effekt immer trivialisierbar, wäre ihre Chernzahl 0 und die Quantisierung des Stroms würde nicht auftreten.

Literatur

- [AB59] AHARONOV, Y ; BOHM, D.: Significance of electromagnetic potentials in quantum theory. In: *Physical Review* 115 (1959), S. 485–491
- [AM76] ASHCROFT, Neil W. ; MERMIN, N. D.: *Solid State Physics*. Philadelphia : Saunders College, 1976
- [Ber84] BERRY, M. V.: Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 392 (1984), Nr. 1802, S. 45–57

- [Che46] CHERN, Shiing-Shen: Characteristic Classes of Hermitian Manifolds. In: *Annals of Mathematics, Second Series* 47 (1946), Nr. 1, S. 85–121
- [Gri62] GRIFFITHS, Phillip A.: On a theorem of Chern. In: *Illinois Journal of Mathematics* 6 (1962), Nr. 3, S. 468–479
- [Her70] HERMANN, Robert: *Vector Bundles in Mathematical Physics*. New York : W. A. Benjamin, 1970
- [Kat50] KATO, Tosio: On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics. In: *Journal of the Physical Society of Japan* 5 (1950), Nr. 6, S. 435–439
- [KSV93] KING-SMITH, R.D. ; VANDERBILT, D.: Theory of Polarization of crystalline solids. In: *Phys. Rev. B* 47 (1993), S. 1651–1654
- [Nic07] NICOLAESCU, Liviu I.: *Lectures on the Geometry of Manifolds*. 2. World Scientific, 2007
- [PST09] PANATI, G. ; SPARBER, C. ; TEUFEL, S.: Geometric currents in piezoelectricity. In: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 91 (2009), S. 387–422
- [RS78] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, 1972–1978
- [SBT13] SCHULZ-BALDES, Hermann ; TEUFEL, Stefan: Orbital Polarization and Magnetization for Independent Particles in Disordered Media. In: *Communications in Mathematical Physics* 319 (2013), Nr. 3, 649–681. <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-012-1639-0>. – DOI 10.1007/s00220-012-1639-0. – ISSN 0010-3616
- [Sim83] SIMON, Barry: Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase. In: *Physical Review Letters* 51 (1983), Nr. 24, S. 2167–2170
- [Spi79] SPIVAK, Mike: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 2. Publish or Perish, 1979
- [ST13] STIEPAN, H. ; TEUFEL, S.: Semiclassical approximations for Hamiltonians with operator-valued symbols. In: *Commun. Math. Phys.* 320 (2013), S. 821–849
- [Teu03] TEUFEL, Stefan: *Adiabatic Perturbation Theory in Quantum Dynamics*. Springer, 2003