Gentzens Konsistenzbeweis für die Arithmetik

Michael Hahn

Seminar *Mathematische und Philosophische Logik*
Prof. Dr. Peter Schroeder-Heister
Universität Tübingen
Sommersemester 2011

1 Einleitung

Diese Arbeit stellt den von Gerhard Gentzen 1938 ([2]) publizierten Konsistenzbeweis für die erststufige Arithmetik dar. Historisch geht er auf das zweite der von David Hilbert 1900 gestellten 23 Probleme zurück, das einen Beweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik fordert. Nach dem Zweiten Unvollständigkeitssatz, den Gödel 1931 publizierte, ist ein derartiger Beweis aber in der Arithmetik und jedem schwächeren System unmöglich. Anders als Beweise durch viel stärkere Systeme wie der Mengenlehre, benötigt Gentzens Beweis zusätzlich zur Arithmetik nur die transfinite Induktion bis ϵ_0, d.h., der kleinsten Ordinalzahl, deren Wohlfundiertheit die Peano-Arithmetik nicht mehr beweisen kann.

2 Formalisierung des Beweisbegriffs

2.1 Der verwendete Kalkül

Konvention 1 (Objekt- und metasprachliche Variablen)**.** Kleine griechische Buchstaben sind Metavariablen für Formeln oder Ordinalzahlen, große sind Metavariablen für Formelmengen oder Folgen von Formeln. $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ etc. sind Metavariablen für Beweise. s, t, u sind Metavariablen für Terme. Objektsprachliche Variablen sind x, y, z, x', x'' etc. Die Notation $[t/s]$ für Substitutionen wird so verstanden, dass alle Vorkommen von s durch t ersetzt werden.

Definition 2 (Sequenzen)**.** Eine *Sequenz* besteht aus zwei endlichen Folgen von Formeln, die durch das Sequenzzeichen $\vdash$ getrennt werden:
$\phi_1, ..., \phi_n \vdash \psi_1, ..., \psi_m$ $(n, m \geq 0)$. Semantisch wird eine Sequenz als die Beweisbarkeitsaussage $\phi_1, ..., \phi_n \vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_m$ aufgefasst.

Definition 3 (Schlussfiguren)**.** Das verwendete Sequenzenkalkül hat folgende Schlussregeln:

Axiom:

$$\frac{}{\phi \vdash \phi}$$

Struktur-Schlussregeln:

- Verdünnung:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{\sigma, \Gamma \vdash \Theta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \sigma}$$

- Zusammenziehung:

$$\frac{\sigma, \sigma, \Gamma \vdash \Theta}{\sigma, \Gamma \vdash \Theta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \sigma, \sigma}{\Gamma \vdash \Theta, \sigma}$$

- Vertauschung:

$$\frac{\Delta, \sigma, \tau, \Gamma \vdash \Theta}{\Delta, \tau, \sigma, \Gamma \vdash \Theta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \sigma, \tau, \Delta}{\Gamma \vdash \Theta, \tau, \sigma, \Delta}$$

- Schnitt:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \sigma \qquad \sigma, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda}$$

Verknüpfungs-Schlussregeln:

- Konjunktion:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \sigma \qquad \Gamma \vdash \Theta, \tau}{\Gamma \vdash \Theta, \sigma \wedge \tau}$$

$$\frac{\sigma, \Gamma \vdash \Theta}{\sigma \wedge \tau, \Gamma \vdash \Theta} \quad \frac{\tau, \Gamma \vdash \Theta}{\sigma \wedge \tau, \Gamma \vdash \Theta}$$

- Disjunktion:

$$\frac{\sigma, \Gamma \vdash \Theta, \qquad \tau, \Gamma \vdash \Theta}{\sigma \vee \tau, \Gamma \vdash \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \sigma}{\Gamma \vdash \Theta, \sigma \vee \tau} \quad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \tau}{\Gamma \vdash \Theta, \sigma \vee \tau}$$

- Allquantor:

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, \phi(x)}{\Gamma \vdash \Theta, \forall x \phi(x)} \quad \frac{\phi(t), \Gamma \vdash \Theta}{\forall x \phi(x), \Gamma \vdash \Theta}$$

- Existenzquantor:

$$\frac{\phi(x), \Gamma \vdash \Theta}{\exists x \phi(x), \Gamma \vdash \Theta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \phi(t)}{\Gamma \vdash \Theta, \exists x \phi(x)}$$

- Negation:

$$\frac{\sigma, \Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \neg\sigma} \quad \frac{\Gamma \vdash \Theta, \sigma}{\neg\sigma, \Gamma \vdash \Theta}$$

wobei t ein beliebiger Term ist.

In der Schnittregel heißt die mit ϕ bezeichnete Formel *Schnittformel.* In den Verknüpfungs-Schlussfiguren heißt die Formel, die im Schema nur in der Untersequenz vorkommt, die *Hauptformel.* In der Verdünnungs-Schlussfigur wird damit die nur in der Untersequenz vorkommende Formel bezeichnet. In den Quantorenregeln heißen die freien Variabeln *Eigenvariablen.* Sie dürfen jeweils in der Untersequenz nicht vorkommen.

2.2 Formalisierung der Arithmetik

Die verwendete Formalisierung der Arithmetik ist eine Menge A von quantorenfreien Sequenzen in einer Sprache $\mathcal{L}$. Die Induktion gehört nicht zur Axiomatisierung, sondern wird dem Kalkül als Schlussregel hinzugefügt.

Definition 4 (Sprache)**.** $\mathcal{L}$ ist eine Sprache erster Stufe mit $S(\cdot)$ (Nachfolgerfunktion) als einziger Funktion und $\overline{1}$ als einzige Konstante, und einer beliebigen Menge von Prädikaten. Als Abkürzung für Terme der Form $\underbrace{S...S}_{n-1\ mal}\ \overline{1}$ dient $\overline{n}$.

Definition 5 (Induktion)**.** Die Induktion bis ω wird dem Kalkül als eigene Schlussregel zugefügt:

$$\frac{\phi(x), \Gamma \vdash \Theta, \phi(Sx)}{\phi(\overline{1}), \Gamma \vdash \Theta, \phi(t)}\ \mathrm{VI}$$

Definition 6 (Axiomatisierung)**.** Die Axiomatisierung A in $\mathcal{L}$ erfüllt folgende Bedingungen:

- Alle Elemente von A haben die Form $\phi_1, ..., \phi_n \vdash \psi_1, ..., \psi_m$, wobei alle ϕ_i atomar sind.
- Für jedes Grundatom a in $\mathcal{L}$ gilt $(\vdash a) \in A$ oder $(a \vdash) \in A$
- Aus A lässt sich ohne Verknüpfungs-Schlussregeln oder Indukion (d.h. nur mit logischen Axiomen und Struktur-Schlussregeln) die leere Sequenz $\vdash$ nicht herleiten.
- Wenn ϕ in A ist, ist für jede Substitution σ auch $\phi\sigma$ in A.

Bemerkung Dieses Vorgehen weicht von Gentzen ab, der stattdessen alle „wahren“ Sequenzen aus Atomen erlaubt. Da der Konsistenzbeweis aber nur geringe Anforderungen an die Axiome stellt, genügt die angegebene syntaktische Charakterisierung. Die zweite Forderung formalisiert dabei Gentzens Forderung, dass alle Einsetzungen in Prädikate entscheidbar seien. Die dritte Forderung wird für Lemma 17 benötigt, das voraussetzt, dass es (nach Elimination der Induktion) keinen Widerspruchsbeweis ohne Verknüpfungsregeln gibt. Die vierte Bedingung wird für die Lemmata 11 und 13 und für Def. 19 benötigt, die voraussetzen, dass in Herleitungen freie Variablen ersetzt werden können.

Da nur eine schwache Form der Konsistenz von A, aber nicht die inhaltliche „Korrektheit“ gefordert ist, folgt aus Gentzens Beweis auch die Konsistenz von Axiomensystemen, die andere mathematische Strukturen als die natürlichen Zahlen beschreiben, aber auf ähnliche Weise quantorenfrei formalisiert werden können und in denen die Induktion bis ω ebenfalls gilt. Im Folgenden wird gezeigt, wie die Arithmetik tatsächlich im Sinne dieser Definition formalisiert werden kann.

Beispiel 7 (Axiomatisierung der Arithmetik)**.** Als Grundlage der Axiome können quantorenfreie Instanzen der Peano-Axiome ohne Induktion eingesetzt werden, wobei Addition und Multiplikation durch Prädikate repräsentiert werden:

1. $Sx = \overline{1} \vdash$
2. $Sx = Sy \vdash x = y$
3. $\vdash plus(x, \overline{1}, Sx)$
4. $plus(x, y, z) \vdash plus(x, Sy, Sz)$
5. $\vdash times(x, \overline{1}, x)$
6. $times(x, y, z), plus(z, x, u) \vdash times(x, Sy, u)$

Da der Kalkül keine Regeln für die Gleichheit besitzt, benötigt das System auch Axiome für $=$, die nicht im engeren Sinne zur Arithmetik gehören:

7. $\vdash x = x$ (Reflexivität)
8. $x = y \vdash y = x$ (Symmetrie)
9. $x = y, y = z \vdash x = z$ (Transitivität)
10. $x = y \vdash t[x/z] = t[y/z]$ für alle Terme t (Ersetzbarkeit)
11. $x = y, \Gamma[x/z] \vdash \Gamma[y/z]$ für alle Folgen Γ aus Atomen (Ersetzbarkeit)

Zudem muss ausgedrückt werden, dass *plus* und *times* Funktionen repräsentieren. Die Totalität wird durch die Peano-Axiome bereits gewährleistet, das folgende Axiom stellt die Eindeutigkeit sicher:

12. $P(x, y, z), P(x, y, w) \vdash z = w$ (für $P \in \{plus, times\}$)

Ferner ist für jedes Axiom ϕ und jede Substitution σ auch $\phi\sigma$ ein Axiom (vierte Bedingung aus Def. 6). Zudem ist jede aus den Axiomen durch Schnitt ableitbare Sequenz $\vdash a$ oder $a \vdash$ (a Grundatom) in A. Es lässt sich zeigen, dass für jedes Grundatom die Gültigkeit in $\mathbb{N}$ schon durch Schnitt entschieden werden kann:

- $\vdash \overline{n} = \overline{m}$: direkt aus Axiom 7, da nur syntaktisch gleiche Grundterme in $\mathbb{N}$ gleich sind
- $\overline{n} = \overline{m} \vdash$: durch Axiom 1 und wiederholte Anwendung von Axiom 2
- $\vdash plus(\overline{n}, \overline{m}, \overline{l})$: durch Axiom 3 und wiederholte Anwendung von Axiom 4 (analog für $\vdash times(\overline{n}, \overline{m}, \overline{l})$)
- $plus(\overline{n}, \overline{m}, \overline{l}) \vdash$: Zunächst leitet man $\vdash plus(\overline{n}, \overline{m}, \overline{n \cdot m})$ her. Mit Axiom 12 und $\overline{l} = \overline{n \cdot m} \vdash$ erhält man $plus(\overline{n}, \overline{m}, \overline{l}) \vdash$ (analog für $times(\overline{n}, \overline{m}, \overline{l}) \vdash$).

Damit erfüllt A die zweite Bedingung aus Def. 6.

Die geforderte Konsistenz in einem System, das nur aus Strukturschlussregeln besteht (dritte Bedingung aus Def. 6), lässt sich arithmetisch leicht zeigen (Dieser Beweis ist angelehnt an [1] 416). Sei dazu $\mathcal{D}$ eine Herleitung, die nur Struktur-Schlussregeln und logische sowie arithmetische Axiome enthält und deren Endsequenz $\vdash$ ist. Dann ersetze man alle Variablen durch $\overline{1}$ und erhält eine Ableitung, die rein aussagenlogisch aus variablenfreien Sequenzen einen Widerspruch herleitet. Da Wahrheit (im Sinne der hier angegebenen Axiome) von Δ_0-Formeln arithmetisch repräsentierbar ist, beweist bereits die Arithmetik, dass dies nicht möglich ist.

Die inhaltliche Korrektheit der angegebenen Axiomatisierung als Charakterisierung der Arithmetik muss dagegen außerhalb des hier gegebenen Konsistenzbeweises metasprachlich gezeigt werden.

Definition 8 (Beweis)**.** Die Menge der Beweise $\mathcal{D}$ ist induktiv wie folgt definiert:

- Jedes arithmetische Axiom, d.h. jedes Element von A, ist ein Beweis.
- Jedes logische Axiom, d.h. jede Sequenz der Form $\phi \vdash \phi$, ist ein Beweis.
- Seien $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ Beweise. Dann erhält man einen neuen Beweis, indem man die Obersequenz(en) einer Schlussfigur durch $\mathcal{D}_1$ (und $\mathcal{D}_2$) ersetzt.

Ein *Beweis für die Formel* ϕ ist ein Beweis mit Endsequenz $\vdash \phi$.

Beispiel: Herleitung der Formel $\forall x(x = \overline{1} \vee \exists y(x = Sy))$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \overline{1} = \overline{1}$}
\RightLabel{\scriptsize($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\vdash \overline{1} = \overline{1} \vee \exists y(\overline{1} = Sy)$}
\AxiomC{$x = \overline{1} \vdash Sx = S\overline{1}$}
\RightLabel{\scriptsize($\exists$R)}
\UnaryInfC{$x = \overline{1} \vdash \exists y(Sx = Sy)$}
\RightLabel{\scriptsize($\vee$R)}
\UnaryInfC{$x = \overline{1} \vdash Sx = \overline{1} \vee \exists y(Sx = Sy)$}
\AxiomC{$x = Sy \vdash Sx = SSy$}
\RightLabel{\scriptsize($\exists$R)}
\UnaryInfC{$x = Sy \vdash \exists y(Sx = Sy)$}
\RightLabel{\scriptsize($\exists$L)}
\UnaryInfC{$\exists y(x = Sy) \vdash \exists y(Sx = Sy)$}
\RightLabel{\scriptsize($\vee$R)}
\UnaryInfC{$\exists y(x = Sy) \vdash Sx = \overline{1} \vee \exists y(Sx = Sy)$}
\RightLabel{\scriptsize($\vee$L)}
\BinaryInfC{$x = \overline{1} \vee \exists y(x = Sy) \vdash Sx = \overline{1} \vee \exists y(Sx = Sy)$}
\RightLabel{\scriptsize(VI)}
\UnaryInfC{$\overline{1} = \overline{1} \vee \exists y(\overline{1} = Sy) \vdash x = \overline{1} \vee \exists y(x = Sy)$}
\RightLabel{\scriptsize(Schnitt)}
\BinaryInfC{$\vdash x = \overline{1} \vee \exists y(x = Sy)$}
\RightLabel{\scriptsize($\forall$R)}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x(x = \overline{1} \vee \exists y(x = Sy))$}
\end{prooftree}
$$

3 Der Beweis

Den Kern des Konsistenzbeweises bildet der Beweis des folgenden Satzes:

Theorem 9. *Sei A eine Sequenzenmenge gemäß Def. 6. Dann ist A im um die Induktion bis ω (Def. 5) erweiterten Sequenzenkalkül konsistent.*

Idee 10 (Beweis)**.** *Es wird ein Komplexitätsmaß definiert, das jeder Ableitung eine Ordinalzahl unter ϵ_0 zuordnet. Dann wird ein Reduktionsschritt definiert und gezeigt, dass dieser jede Widerspruchsherleitung aus gültigen Axiomen wieder in eine Widerspruchsherleitung aus gültigen Axiomen reduziert, und zwar so, dass die entsprechende Ordinalzahl sinkt. Aus der Wohlfundiertheit der Ordinalahlen unter ϵ_0 folgt, dass es keine Widerspruchsherleitung geben kann.*

3.1 Ein Reduktionsschritt

Vor dem eigentlichen Reduktionsschritt sind zunächst einige Vorbereitungsschritte nötig, die hier mit I-III durchnummeriert sind.

Lemma 11 (Vobereitungsschritt I)**.** *Eine Widerspruchsherleitung kann so umgeformt werden, dass alle freien Variablen Eigenvariable einer darunter liegenden Schlussfigur sind.*

Beweis. Ersetze alle Vorkommen von freien Variablen, die keine Eigenvariablen einer darunter liegenden Schlussfigur sind, durch $\overline{1}$. Durch Induktion lässt sich zeigen, dass das Ergebnis wieder eine korrekte Widerspruchsherleitung ist. □

Definition 12. Das *Endstück* einer Herleitung umfasst alle Sequenzen, die man durchläuft, wenn man jeden Pfad von der Endsequenz her solange aufwärts verfolgt, bis man auf den Schlussstrich einer Verknüpfungsschlussfigur trifft (d.h. die Untersequenz gehört noch zum Endstück) oder bis der Pfad endet.

Lemma 13 (Vorbereitungsschritt II (VI-Reduktion))**.** *Aus dem Endstück einer Widerspruchsherleitung, auf die Vorbereitungsschritt angewendet I wurde, lassen sich alle VI-Schlussfiguren entfernen.*

Beweis. Wir geben zunächst ein Verfahren zur Entfernung einer einzelnen VI-Schlussfigur an. Man wählt die am weitesten links liegende und niedrigste VI-Reduktion aus. Nach dem ersten Vorbereitungsschritt kann ihre Untersequenz nur noch Ziffern enthalten, da keine Schlussfigur mit Eigenvariable darunter vorkommen kann. Damit hat die Ableitung folgende Form:

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \dfrac{\phi(x),\Gamma\vdash\Theta,\phi(Sx)}{\phi(\overline{1}),\Gamma\vdash\Theta,\phi(\overline{n})}\,\mathrm{VI}\\ \cdots\end{array}$$

Da die Induktion nur bis zu einer bestimmten Zahl reicht, lässt sich die Untersequenz auch ohne die Induktionsregel ableiten. Ist $\overline{n}=1$, wird sie aus dem Axiom $\phi(\overline{1})\vdash\phi(\overline{1})$ durch Verdünnungen und Vertauschungen hergeleitet. Sonst wird die Induktions-Schlussfigur durch folgende Ableitung ersetzt:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}[\overline{1}/x]\\ \phi(\overline{1}),\Gamma\vdash\Theta,\phi(\overline{2})\end{array}\qquad\begin{array}{c}\mathcal{D}[\overline{2}/x]\\ \phi(\overline{2}),\Gamma\vdash\Theta,\phi(\overline{3})\end{array}}{\phi(\overline{1}),\Gamma,\Gamma\vdash\Theta,\Theta,\phi(\overline{3})}}{\phi(\overline{1}),\Gamma\vdash\Theta,\phi(\overline{3})}\qquad\begin{array}{c}\mathcal{D}[\overline{3}/x]\\ \phi(\overline{3}),\Gamma\vdash\Theta,\phi(\overline{4})\end{array}}{\dfrac{\phi(\overline{1}),\Gamma,\Gamma\vdash\Theta,\Theta,\phi(\overline{4})}{\phi(\overline{1}),\Gamma\vdash\Theta,\phi(\overline{4})}}\\ \mathcal{D}'\\ \phi(\overline{1}),\Gamma\vdash\Theta,\phi(\overline{n})\\ \cdots\end{array}$$

Zur Entfernung alle VI-Schlussfiguren wird das Verfahren so lange iteriert, bis keine VI-Schlussfigur mehr vorhanden ist. Dieses Verfahren terminiert, da die Zahl der VI-Schlussfiguren mit jedem Schritt um 1 sinkt. □

Lemma 14 (Vorbereitungsschritt III)**.** *Aus dem Endstück einer Widerspruchsherleitung, auf die Vorbereitungsschitte I-II angewendet wurden, lassen sich alle Verdünnungen und logischen Axiome entfernen.*

Beweis. Wir geben ein Verfahren an, welches das Gewünschte leistet.

Entfernung aller Verdünnungen. Zunächst lässt sich eine einzelne Verdünnung wie folgt entfernen. Es wird die am weitesten links und am niedrigsten liegende Verdünnung ausgewählt. Sie wird entfernt und anstatt der Untersequenz die Obersequenz weiter verwendet. Die Fortsetzung der

Verdünnungsformel σ wird in allen darunter liegenden Schlussfiguren entfernt. Werden dadurch Ober- und Untersequenz einer Schlussfigur gleich, wird die Schlussfigur entfernt. Ist σ eine Schnittformel, wird der Schnitt (inklusive der anderen Obersequenz) entfernt und durch eine (eventuell leere) Folge von Verdünnungen und Vertauschungen ersetzt.

Die Gesamtheit der Verdünnungen des Endstücks werden durch Iteration dieses Verfahrens ersetzt, bis keine Verdünnung mehr vorhanden ist. Da jede Formel, die im Endstück einer Widerspruchsherleitung vorkommt, weiter unten wieder eliminiert werden muss, wird bei jeder Anwendung des Verfahrens entweder ein Schnitt oder eine Zusammenziehung entfernt. Im letzteren Fall werden keine Zusamenziehungen hinzugefügt. Das Verfahren fügt nie Schnitte hinzu. Damit sinkt das Maß $\langle$*Zahl der Schnitte, Zahl der Zusammenziehungen*$\rangle$, unter Annahme einer lexikographischen Ordnung, bei jeder Anwendung. Durch Induktion bis ω^2 erhält man daraus, dass das Verfahren terminiert. Damit lassen sich durch das Verfahren alle Verdünnungen entfernen.

Entfernung der logischen Axiome. Da auf ein logisches Axiom keine Zusammenziehungen und Vertauschungen anwendbar sind und da die Verdünnungen aus dem Endstück bereits entfernt sind, kann ein logisches Axiom im Endstück nur als Obersequenz eines Schnitts vorkommen. Dann entspricht die Untersequenz aber der anderen Obersequenz und Schnitt und Axiom können entfernt werden.

□

Definition 15 (Formelbund)**.** Zwei Vorkommen einer Formel ϕ in einer Ableitung heißen *direkt verbunden*, wenn sie zur gleichen Schlussfigur gehören und einander im Sinne der Schlussfiguren entsprechen. Der transitive Abschluss von *direkt verbunden* wird mit *verbunden* bezeichnet. Der zu einem Vorkommen gehörende *Formelbund* ist die Menge der mit ihm verbundenen Vorkommenen innerhalb des Endstücks.

Lemma 16 (Existenz zugehöriger Schnitte)**.** *Zu jedem Bund im Endstück einer Ableitung, auf die Vorbereitungsschritte I-III angewendet wurden, gibt es genau einen Schnitt, dessen Schnittformeln zum Bund gehören.*

Beweis. Da die Endsequenz leer ist, muss es eine Schlussfigur geben, sodass eine zum Bund gehörende Formel in einer Ober-, aber nicht in der Untersequenz vorhanden ist. Im Endstück kann es sich dabei nach den Vorbereitungsschritten nur um eine Struktur-Schlussfigur handeln. Nach Def. 15 muss es sich bei der Schlussfigur um einen Schnitt handeln, dessen Schnittformeln zum Bund gehören. Jede andere Schlussfigur mit Elementen des Bundes befindet sich über dem Schlussstrich des Schnitts. Es gebe nun einen von ihm verschiedenen Schnitt, dessen Schnittformeln ebenfalls zum Bund gehören. Damit kommen Elemente des Schnitts in den Ober-, aber nicht in den Untersequenzen vor. Da der Schnitt über dem ersten Schnitt liegen muss, können die Vorkommen nicht mit denen des ersten Schnitts verbunden sein und gehören nicht zum gleichen Bund. Also existiert der zweite Schnitt nicht. Damit gibt es genau einen derartigen Schnitt. □

Lemma 17 (Existenz reduzierbarer Schlussfiguren)**.** *Wenn auf das Endstück einer Widerspruchsherleitung die Vorbereitungsschritte I-III angewendet wurden, enthält es mindestens einen Formelbund, der sowohl auf seiner linken als auch auf seiner rechten Seite mindestens eine oberste Formel hat, welche die Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlussfigur ist. Als linke (analog rechte) Seite des Bundes wird dabei die linke Schnittformel und alle darüber liegenden Vorkommen bezeichnet.*

Beweis. Angenommen, es gebe einen Widerspruchsbeweis ohne Verknüpfungsschlussfiguren. Dann besteht er nur aus einem Endstück, das nach Vorbereitungsschritten I-III keine Induktion enthält. Aber nach Def. 6 lässt sich aus A ohne Verknüpfungsschlussfiguren und Induktion kein Widerspruch herleiten. Also kann es keine Widerspruchsherleitung ohne Verknüpfungsschlussfiguren geben.

Nun wähle man im zu reduzierenden Beweis eine derartige Schlussfigur, unter der sich keine weitere Schlussfigur befindet. Der Bund, der zu ihrer Hauptformel gehört, endet an einem Schnitt, denn Induktions- oder Verknüpfungs-Schlussfiguren können sich nicht unter der gewählten Schlussfigur befinden. Nun betrachte man die andere Seite des Bundes und nehme an, dieser enthalte nicht die Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlussfigur. Dann beginnen alle Pfade durch diese Seite mit einem arithmetischen Axiom und die Formel des Bundes ist atomar. Damit kann sie aber, entgegen der Annahme, nicht die Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlussfigur sein. Also hat der gewählte Bund auf beiden Seite eine oberste Formel, die Hauptformel einer Verknüpfungs-Schlussfigur ist. □

Definition 18 (Höhe)**.** Die Höhe einer Sequenz S ist der höchste Grad eines Schnittes oder einer Induktions-Schlussfigur, dessen bzw. deren Untersequenz unter S steht, oder 0, wenn keine derartige Schlussfigur vorhanden ist.

Definition 19 (Verknüpfungs-Reduktion)**.** Gegeben sei eine Widerspruchsherleitung $\mathcal{D}$, auf die die Vorbereitungsschritte I-III angewendet worden sind. Dann wählt man die am weitesten links gelegene Verknüpfungs-Schlussfigur F_1, die ans Endstück grenzt, und die am weitesten links gelegene davon verschiedene Verknüpfungs-Schlussfigur F_2, deren Hauptformel mit der von F_1 verbunden ist. Dann wird die Ableitung nach derjenigen Reduktionsregel reduziert, die dem äußersten Junktor bzw. Quantor in der Hauptformel entspricht.

Einführung von Quantoren Die gewählte Bundformel habe die Form $Qx\phi(x)$. O.B.d.A. betrachten wir hier nur den Fall $Q = \forall$. Dann hat die Ableitung folgende Form:

$$
\dfrac{
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \phi(x)\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \forall x\phi(x)}\\ \mathcal{D}_3\\ \Gamma \vdash \Theta, \forall x\phi(x)\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \phi(\overline{n}), \Gamma_2 \vdash \Theta_2\end{array}}{\forall x\phi(x), \Gamma_2 \vdash \Theta_2}\\ \mathcal{D}_4\\ \forall x\phi(x), \Delta \vdash \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda}\ \text{Schnitt}
}{}
$$

$$
\begin{array}{c}
\Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda\\
\mathcal{D}_5\\
\Gamma_3 \vdash \Theta_3\\
\mathcal{D}_6\\
\vdash
\end{array}
$$

Dabei ist $\Gamma_3 \vdash \Theta_3$ die oberste unter dem Schnitt liegende Sequenz, deren Höhe kleiner der Höhe der Obersequenzen des zum Bund gehörigen Schnitts ist. Diese Sequenz existiert offensichtlich, da die Höhe der Endsequenz 0 ist, die der Obersequenzen des Schnitts aber mindestens der Grad von $\forall x\phi(x)$ (d.h., mindestens 1) ist.

Im Fall von $\exists$ unterscheiden sich lediglich die Obersequenzen, indem $\phi(\overline{n})$ und $\phi(x)$ auf der jeweils entgegengesetzten Stelle stehen.

Die Ableitung wird wie folgt umgewandelt:

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}
\dfrac{
\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1[\overline{n}/x]\\ \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \phi(\overline{n})\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \phi(\overline{n}), \Theta_1, \forall x\phi(x)}\\ \mathcal{D}'_3\\ \Gamma \vdash \phi(\overline{n}), \Theta, \forall x\phi(x)\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \phi(\overline{n}), \Gamma_2 \vdash \Theta_2\end{array}}{\forall x\phi(x), \Gamma_2 \vdash \Theta_2}\\ \mathcal{D}_4\\ \forall x\phi(x), \Delta \vdash \Lambda\end{array}
}{\Gamma, \Delta \vdash \phi(\overline{n}), \Theta, \Lambda}\\
\mathcal{D}'_5\\
\dfrac{\Gamma_3 \vdash \phi(\overline{n}), \Theta_3}{\Gamma_3 \vdash \Theta_3, \phi(\overline{n})}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\dfrac{
\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \phi(x)\end{array}}{\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \forall x\phi(x)}\\ \mathcal{D}_3\\ \Gamma \vdash \Theta, \forall x\phi(x)\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \phi(\overline{n}), \Gamma_2 \vdash \Theta_2\end{array}}{\forall x\phi(x), \Gamma_2\, \phi(\overline{n}) \vdash \Theta_2}\\ \mathcal{D}'_4\\ \forall x\phi(x), \Delta\, \phi(\overline{n}) \vdash \Lambda\end{array}
}{\Gamma, \Delta\, \phi(\overline{n}) \vdash \Theta, \Lambda}\\
\mathcal{D}''_5\\
\dfrac{\Gamma_3, \phi(\overline{n}) \vdash \Theta_3}{\phi(\overline{n}), \Gamma_3 \vdash \Theta_3}
\end{array}
}{
\begin{array}{c}
\dfrac{\Gamma_3, \Gamma_3 \vdash \Theta_3, \Theta_3}{\Gamma_3 \vdash \Theta_3}\\
\mathcal{D}_6\\
\vdash
\end{array}
}
$$

Dabei erhält man $\mathcal{D}'_3, \mathcal{D}'_4, \mathcal{D}'_5$ und $\mathcal{D}''_5$ durch Hinzufügen von $\phi(\overline{n})$ in den Sequenzen desjenigen Pfades, der bei der jeweils angegebenen Anfangsformel beginnt.

Einführung binärer Junktoren Hier ist nur der Fall angegeben, wo die Schlussfiguren mit zwei Obersequenzen links stehen muss ($\wedge$), die $\vee$-Einführung lässt sich analog reduzieren, wobei die Schlussfigur mit zwei Obersequenzen rechts steht. $\Gamma_3\vdash \Theta_3$ ist wie im ersten Fall definiert:

Vorher:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1^1 & \mathcal{D}_1^2 \\ \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \sigma_1 & \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \sigma_2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \sigma_1 \circ \sigma_2} \end{array} \\ \mathcal{D}_3 \\ \Gamma \vdash \Theta, \sigma_1 \circ \sigma_2
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \sigma_i, \Gamma_2 \vdash \Theta_2 \\ \hline \sigma_1 \circ \sigma_2, \Gamma_2 \vdash \Theta_2 \end{array} \\ \mathcal{D}_4 \\ \sigma_1 \circ \sigma_2, \Delta \vdash \Lambda
\end{array} \\ \hline
\Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda
\end{array} \text{Schnitt} \\
\mathcal{D}_5 \\
\Gamma_3 \vdash \Theta_3 \\
\mathcal{D}_6 \\
\vdash
\end{array}$$

Nachher:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \mathcal{D}_1^i \\ \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \sigma_i \\ \hline\hline \Gamma_1 \vdash \sigma_i, \Theta_1, \sigma_1 \circ \tau_2 \end{array} \\ \mathcal{D}_3' \\ \Gamma \vdash \sigma_i, \Theta, \sigma_1 \circ \sigma_2
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \sigma_i, \Gamma_2 \vdash \Theta_2 \\ \hline \sigma_1 \circ \sigma_2, \Gamma_2 \vdash \Theta_2 \end{array} \\ \mathcal{D}_4 \\ \sigma_1 \circ \sigma_2, \Delta \vdash \Lambda
\end{array} \\ \hline
\Gamma, \Delta \vdash \sigma_i, \Theta, \Lambda
\end{array} \\
\mathcal{D}_5' \\
\Gamma_3 \vdash \sigma_i, \Theta_3 \\ \hline\hline
\Gamma_3 \vdash \Theta_3, \sigma_i
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1^1 & \mathcal{D}_1^2 \\ \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \sigma_1 & \Gamma_1 \vdash \Theta_1, \sigma_2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\Gamma_1 \vdash \Theta_1, \sigma_1 \circ \sigma_2} \end{array} \\ \mathcal{D}_3 \\ \Gamma \vdash \Theta, \sigma_1 \circ \sigma_2
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \sigma_i, \Gamma_2 \vdash \Theta_2 \\ \hline\hline \sigma_1 \circ \sigma_2, \Gamma_2\, \sigma_i, \vdash \Theta_2 \end{array} \\ \mathcal{D}_4' \\ \sigma_1 \circ \sigma_2, \Delta\, \sigma_i \vdash \Lambda
\end{array} \\ \hline
\Gamma, \Delta\, \sigma_i \vdash \Theta, \Lambda
\end{array} \\
\mathcal{D}_5'' \\
\Gamma_3, \sigma_i \vdash \Theta_3 \\ \hline\hline
\sigma_i, \Gamma_3 \vdash \Theta_3
\end{array} \\ \hline
\Gamma_3, \Gamma_3 \vdash \Theta_3, \Theta_3 \\ \hline\hline
\Gamma_3 \vdash \Theta_3 \\
\mathcal{D}_6 \\
\vdash
\end{array}$$

$\neg$-Einführung Analog:

Vorher:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \phi,\Gamma_1\vdash\Theta_1\end{array}}{\Gamma_1\vdash\Theta_1,\neg\phi}\\ \mathcal{D}_3\\ \Gamma\vdash\Theta,\neg\phi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \Gamma_2\vdash\Theta_2,\phi\end{array}}{\neg\phi,\Gamma_2\vdash\Theta_2}\\ \mathcal{D}_4\\ \neg\phi,\Delta\vdash\Lambda\end{array}}{\Gamma,\Delta\vdash\Theta,\Lambda}\text{ Schnitt}\\
\mathcal{D}_5\\
\Gamma_3\vdash\Theta_3\\
\mathcal{D}_6\\
\vdash
\end{array}
$$

Nacher:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \phi,\Gamma_1\vdash\Theta_1\end{array}}{\Gamma_1\vdash\Theta_1,\neg\phi}\\ \mathcal{D}_3\\ \Gamma\vdash\Theta,\neg\phi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \Gamma_2\vdash\Theta_2,\phi\end{array}}{\neg\phi,\Gamma_2\vdash\Theta_2,\phi}\\ \mathcal{D}_4'\\ \neg\phi,\Delta\vdash\Lambda,\phi\end{array}}{\Gamma,\Delta\vdash\Theta,\Lambda,\phi}\\ \mathcal{D}_5''\\ \Gamma_3\vdash\Theta_3,\phi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \phi,\Gamma_1\vdash\Theta_1\end{array}}{\phi,\Gamma_1\vdash\Theta_1,\neg\phi}\\ \mathcal{D}_3'\\ \phi,\Gamma\vdash\Theta,\neg\phi\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \Gamma_2\vdash\Theta_2,\phi\end{array}}{\neg\phi,\Gamma_2\vdash\Theta_2}\\ \mathcal{D}_4\\ \neg\phi,\Delta\vdash\Lambda\end{array}}{\phi,\Gamma,\Delta\vdash\Theta,\Lambda}\\ \mathcal{D}_5'\\ \phi,\Gamma_3\vdash\Theta_3\end{array}}{\Gamma_3,\Gamma_3\vdash\Theta_3,\Theta_3}\\
\hline\hline
\Gamma_3\vdash\Theta_3\\
\mathcal{D}_6\\
\vdash
\end{array}
$$

Definition 20 (Reduktion)**.** Gegeben sei eine Widerspruchsherleitung $\mathcal{D}$. Dann erhält man $Red(\mathcal{D})$ durch Anwendung der Vorbereitungsschitte I-III und eines Schritts der Verknüpfungs-Reduktion.

Lemma 21 (Korrektheit der Reduktion)**.** *Wenn $\mathcal{D}$ eine Widerspruchsherleitung ist, dann ist $Red(\mathcal{D})$ definiert und ebenfalls eine Widerspruchsherleitung.*

Beweis. Die Vorbereitungsschritte sind auf Widerspruchsherleitungen offensichtlich definiert. Nach Lemma 17 lässt sich der Verknüpfungs-Reduktionsschritt auf $\mathcal{D}$ anwenden. Dass $Red(\mathcal{D})$ eine Widerspruchsherleitung ist, folgt aus der Korrektheit der einzelnen Schritte. □

3.2 Ordinalzahlen

Da für den Beweis nur Ordinalzahlen unter ϵ_0 benutzt werden, beschränken wir die Bezeichnung *Ordinalzahl* hier auf diese. Wir definieren diese Ordinalzahlen hier nicht in der Mengenlehre, sondern über das durch die Cantor-Normalform gegebene Notationssystem.

Definition 22 (Ordinalzahlen und Ordnung der Ordinalzahlen)**.** Die Menge der Ordinalzahlen und die darauf definierte Ordnung $<$ sind induktiv wie folgt definiert:

- 0 ist eine Ordinalzahl. $0 < \beta$ für alle Ordinalzahlen $\beta \neq 0$.
- Wenn $\alpha_m, ..., \alpha_0$ ($m \geq 0$, $\alpha_m \geq ... \geq \alpha_0$) Ordinalzahlen sind, dann ist $\omega^{\alpha_m} + ... + \omega^{\alpha_0}$ eine Ordinalzahl. Es gilt $\alpha < \beta$ ($\alpha = \omega^{\alpha_m} + ... + \omega^{\alpha_0}$, $\beta = \omega^{\beta_k} + ... + \omega^{\beta_0}$) g.d.w. es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass:
  - α und β auf den N größten Exponenten übereinstimmen, und
  - der N+1-größte Exponent von β größer als der N+1-größte Exponent von α ist, oder α nur N Summanden hat

Definition 23 (Natürliche Summe)**.** Die natürliche Summe $\cdot\#\cdot$ ist wie folgt definiert:

- $0\#\alpha = \alpha\#0 = 0$.
- Seien $\alpha, \beta > 0$ ($\alpha = \omega^{\alpha_m} + ... + \omega^{\alpha_0}$, $\beta = \omega^{\beta_k} + ... + \omega^{\beta_0}$). Dann erhält man $\alpha\#\beta$ aus $\omega^{\alpha_m} + ... + \omega^{\alpha_0} + \omega^{\beta_k} + ... + \omega^{\beta_0}$ durch absteigende Sortierung nach Größe der Summanden.

Definition 24 (Ordinalzahl von Ableitungen)**.** Die Ordinalzahl von Schlussstrichen und Vorkommen von Sequenzen innerhalb einer Ableitung ist induktiv wie folgt definiert:

- **Axiom**:Die Ordinalzahl eines Axioms ist ω^0 (d.h. 1).
- **Schlussstriche**:
  - Die Ordinalzahl des Schlussstrichs einer Struktur-Schlussfigur ist die natürliche Summe der Ordinalzahlen der Obersequenzen.
  - Die Ordinalzahl des Schlussstrichs einer Verknüpfungs-Schlussfigur ist x + 1, wobei x die höchste Ordinalzahl einer Obersequenz ist.
  - Die Ordinalzahl des Schlussstrichs einer VI-Schlussfigur ist $\omega^{\alpha+1}$, wobei α der höchste Exponent in der Ordinalzahl der Obersequenz ist.
- **Untersequenz**: Sei α die Ordinalzahl des letzten Schlussstrichs einer Ableitung $\mathcal{D}$ und d die Höhe der zugehörigen Obersequenzen minus der Höhe der Untersequenz. Dann ist die Ordinalzahl der letzten Sequenz von $\mathcal{D}$ gleich $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}}_{d\ mal\ \omega}$.

Die Ordinalzahl der Herleitung $\mathcal{D}$, $Ord(\mathcal{D})$, ist die Ordinalzahl der Schlusssequenz in $\mathcal{D}$.

N.B. Eine Sequenz, die in einem Beweis mehrfach vorkommt, hat im allgemeinen nicht überall die gleiche Ordinalzahl, da Ordinalzahlen den *Vorkommen* von Sequenzen zugeordnet werden. Alternativ könnte man Odinalzahlen direkt auf Ableitungen definieren, womit der Begriff eines *Vorkommens* einer Sequenz entfallen würde.

3.3 Reduktion der Ordinalzahl

Zunächst benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 25. *Seien $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ Herleitungen der Form:*

$$\mathcal{D}_i = \begin{array}{c} \mathcal{D}'_i \\ \Gamma_i \vdash \Delta_i \\ \mathcal{D}_0 \\ \Delta \vdash \Theta \end{array}$$

Es sei die Ordinalzahl von $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$ kleiner als die Ordinalzahl von $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$. Dann ist die Ordinalzahl von $\Delta \vdash \Theta$ in $\mathcal{D}_1$ kleiner gleich derjenigen in $\mathcal{D}_2$. Wenn in $\mathcal{D}_0$ nur Axiome und Struktur-Schlussfiguren vorkommen (insbesondere also wenn $\mathcal{D}_0$ Endstück ist), ist die Zahl in $\mathcal{D}_1$ echt kleiner der in $\mathcal{D}_2$.

Beweis. Durch Induktion über die Komplexität von $\mathcal{D}_0$ entsprechend Def. 24. □

Das Lemma ermöglicht, die Senkung der Ordinalzahl der Schlusssequenz durch Veränderungen an beliebigen darüberliegenden Stellen einer Herleitung zu beweisen.

Theorem 26. *Sei $\mathcal{D}$ eine Widerspruchsherleitung. Dann ist $Ord(Red(\mathcal{D})) < Ord(\mathcal{D})$.*

Beweis. Offensichtlich verändert der Vorbereitungsschritt I die Ordinalzahl nicht. Wir zeigen nun, dass sowohl die VI-Reduktion als auch die Verknüpfungsreduktion mit Vorbereitungsschritt III die Ordinalzahl nicht erhöhen.

VI-Reduktion. Sei die Ordinalzahl der Obersequenz $\gamma = \omega^{\alpha_m} + ... + \omega^{\alpha_0}$.

Vor der Reduktion: Der Schlussstrich hat die Ordinalzahl ω^{α_m+1}. Da weiter unten noch die Bundschnitte für $\phi(\overline{1})$ und $\phi(\overline{n})$ vorkommen müssen und diese den gleichen Grad haben wie die VI-Schlussfigur, ist die Höhendifferenz 0 und die Untersequenz hat ebenfalls Ordinalzahl ω^{α_m+1}.

Nach der Reduktion:

$n = 1$: Die Untersequenz hat nach der Reduktion Ordinalzahl ω^0. Da ein Beweis mindestens Ordinalzahl ω^0 hat, gilt $\omega^{\alpha_m+1} \geq \omega^{\omega^0} > \omega^0$ und die Ordinalzahl hat sich verringert.

$n > 1$: Alle hinzugefügten Schnitte haben den gleichen Grad wie die eliminierte VI-Schlussfigur. Damit haben alle Sequenzen der Ersatzfigur untereinander die gleiche Höhe und bei keiner Figur tritt eine Höhendifferenz auf. Damit ist die Ordinalzahl der untersten Sequenz gleich n mal γ, der Ordinalzahl der untersten Sequenz von $\mathcal{D}$, und damit kleiner als ω^{α_m+1}.

Da sich die darunter liegenden Teile der Herleitung nicht verändert haben, senkt sich nach Lemma 25 auch die Ordinalzahl der gesamten Ableitung.

Vorbereitungsschritt III. Es ist zu zeigen, dass das angegebene Verfahren zur Entfernng von Verdünnungen und Axiomen die Ordinalzahl der Schlusssequenz nicht erhöht. Wir zeigen zunächst, dass die Ersetzung eines beliebigen Schnitts inklusive einer der darüber stehenden Ableitungen durch eine Folge von Verdünnungen und Vertauschungen die Ordinalzahl nicht erhöht.

Hierzu betrachten wir die Höhen als von der Struktur des Beweises unabhängig und belassen bei der Umformung die alten Höhen der Sequenzen oberhalb der Stelle der Umformung und berechnen die Ordinalzahl entsprechend diesen Höhen. Die Entfernung eines Schnitts kann die Höhen darüber liegender Sequenzen nur senken, also sind die alten Höhen sind nie niedriger als die neuen. Diese abweichenden alten Höhen werden nun sukzessive an die realen Höhen im neuen Beweis angepasst. Dazu wählt man die niedrigste Schlussfigur, bei der die Höhe der Obersequenzen abweicht und senkt diese um 1. Dies wird so lange wiederholt, bis alle Höhen angepasst sind.

Nun ist zu zeigen, dass ein einzelner solcher Anpassungsschritt die Ordinalzahl nicht vergrößert. Über dem betrachteten Schlussstrich stehen vor der Änderung ein oder zwei Obersequenzen mit Ordinalzahlen α und β. Skizze (h, i, j sind Höhen, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Ordinalzahlen):

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ ... \vdash ...[i]\end{matrix}}{\Gamma \vdash \Delta[h, \alpha]} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ ... \vdash ...[j]\end{matrix}}{\Lambda \vdash \Theta[h, \beta]}}{\Xi \vdash \Psi\ [i, \delta]}\ [\gamma]$$

Bei der Änderung wird h durch $h-1$ ersetzt. Damit steigen die Ordinalzahlen der Obersequenzen auf ω^α und ω^β. Wenn $\Gamma \vdash \Delta$ oder $\Lambda \vdash \Theta$ Axiom ist, fällt der Schlussstrich mit Höhendifferenz $i - h$ bzw. $j - h$ weg und die entsprechende Ordinalzahl α bzw. β steigt nicht. O.B.d.A. nehmen wir im Folgenden an, dass die Ordinalzahlen gestiegen sind.

Danach hat der Abschnitt folgende Form:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ ... \vdash ...[i]\end{array}}{\Gamma \vdash \Delta[h-1, \omega^{\alpha}]} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ ... \vdash ...[j]\end{array}}{\Lambda \vdash \Theta[h-1, \omega^{\beta}]}}{\Xi \vdash \Psi\ [i, \delta']} [\gamma']
$$

Die Ordinalzahl des Schlussstrichs γ ist in Abhängigkeit von der Schlussfigur vor der Änderung α, $\alpha\#\beta$ (Strukturschlussfigur), $\alpha+1$ (Verknüpfungsschlussfigur) oder ω^{α_1+1} (α_1 höchster Exponent in α, bei Induktionsschlussfigur). Nach der Änderungen beträgt sie entsprechend $\gamma' = \omega^{\alpha}$, $\omega^{\alpha}\#\omega^{\beta}$, $\omega^{\alpha}+1$ oder $\omega^{\alpha+1}$.

Sei $d := h - i$, dann hatte die Untersequenz vorher die Ordinalzahl $\delta = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma}}}}}}_{d\ mal\ \omega}$, also $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}}_{d\ mal\ \omega}$, $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha\#\beta}}}}}}_{d\ mal\ \omega}$, $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha+1}}}}}}_{d\ mal\ \omega}$ oder $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_1+1}}}}}}_{d+1\ mal\ \omega}$.

Nach der Senkung beträgt die Ordinalzahl der Untersequenz $\delta' = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma'}}}}}}_{d-1\ mal\ \omega}$,

also $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}}_{d\ mal\ \omega} = \delta$, $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\omega^{\alpha}\#\omega^{\beta}}}}}}}_{d\ mal\ \omega} < \delta$, $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}+1}}}}}_{d\ mal\ \omega} < \delta$ oder $\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha+1}}}}}}_{d\ mal\ \omega} < \delta$. Also steigt die Ordinalzahl bei der Senkung der Höhen nicht. Da der Beweis endlich ist, terminiert das Verfahren mit den realen Höhen und realen Ordinalzahlen und die Ordinalzahl der Schlusssequenz kann durch die Elimination eines Schnittes nicht steigen (Lemma 25).

Da bei der Entfernung einer Verdünnung oder eines Axioms je höchstens ein Schnitt entfernt wird und die Einführung oder Entfernung von Zusammenziehungen und Verdünnungen die Ordinalzahl nicht verändert, ist das Theorem damit für diesen Schritt bewiesen.

Verknüpfungsreduktion. Wir zeigen die Reduktion gleichzeitig für alle Fälle. Dabei bezeichne ϕ allgemein die Hauptformel in den Obersequenzen, d.h. ein $\phi(t)$ für Quantoren, σ_i für binäre Junktoren, und ϕ für Negation, und ψ die erweiterte Formel in den Untersequenzen, d.h. $Q\ x\ \phi(x)$, $\sigma_1 \circ \sigma_2$ oder $\neg\phi$.

Die Sequenz $\Gamma_3 \vdash \Theta_3$ hat vor und nach der Reduktion die Höhe σ; die Höhe der Obersequenz des Schnitts über $\mathcal{D}_5$ vor der Reduktion sei ρ; nach Definition gilt $\sigma < \rho$.

ρ ist vor der Reduktion größer als der Grad aller unter $\mathcal{D}_5$ liegenden Schnittformeln und mindestens der Grad von ψ. Bei der Reduktion kommt darunter als Schnittformel nur ϕ hinzu, dessen Grad aber kleiner als $rank(\psi)$ und damit kleiner ρ ist. Also bleibt die Höhe des Schlusstrichs unter $\mathcal{D}'_5$ bzw. $\mathcal{D}''_5$ nach der Reduktion ρ.

Die Höhe der Obersequenzen des bei der Reduktion neu eingefügten Schnitts sei τ. Offenbar ist $\tau \geq \sigma$. Zudem gilt nach Definition $\tau = max(\sigma,$

$rank(\psi)$). Sei nun $\tau = \sigma$. Dann gilt $\tau = \sigma < \rho$. Sei dagegen $\tau = rank(\phi)$. Dann ist $\rho \geq rank(\psi) > rank(\phi) = \tau$. Also gilt allgemein $\rho > \tau \geq \sigma$.

Die Ordinalzahl des Schlussstrichs am Ende von $\mathcal{D}_5$ (vor der Reduktion) sei α, die der Schlussstriche am Ende von $\mathcal{D}'_5$ und $\mathcal{D}'_5$ (nach der Reduktion) seien α_1 und α_2. Es gilt nun $\alpha_1, \alpha_2 < \alpha$. Denn die über den betreffenden Schlussstrichen stehenden Ableitungen vor und nach der Reduktion unterscheiden sich - von der zusätzlichen Formel ϕ abgesehen, die aber die Ordinalzahl nicht beeinflusst - nur dadurch, dass eine Verknüpfungs-Schlussfigur durch Struktur-Schlussfiguren ersetzt wurde, wobei eventuell ein Teilbaum weggefallen ist.

In der alten Ableitung hat $\Gamma_3 \vdash \Theta_3$ die Ordinalzahl $\beta = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}}_{\rho-\sigma\ mal\ \omega}$. Die Obersequenzen des neuen Schnitts haben die Ordinalzahlen (für $i = 1, 2$) $\gamma_i = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_i}}}}}}_{\rho-\tau\ mal\ \omega}$. In der neuen Ableitung hat $\Gamma_3 \vdash \Theta_3$ die Ordinalzahl $\beta' = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{(\gamma_1 \# \gamma_2)}}}}}}_{\tau-\sigma\ mal\ \omega}$. Zu zeigen ist nun, dass $\beta > \beta'$ gilt. Aufgrund von $\rho > \tau \geq \sigma$ (siehe oben) lassen sich β und β' wie folgt schreiben: $\beta = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\kappa}}}}}}_{\tau-\sigma\ mal\ \omega}$, $\beta' = \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\lambda}}}}}}_{\tau-\sigma\ mal\ \omega}$ mit $\kappa = \omega^{\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha}}}}}}_{\rho-1-\tau\ mal\ \omega}}$ und $\lambda = \omega^{\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_1}}}}}}_{\rho-1-\tau\ mal\ \omega}} \# \omega^{\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha_2}}}}}}_{\rho-1-\tau\ mal\ \omega}}$. Aufgrund von $\alpha_i < \alpha$ sind die Exponenten beider Summanden von λ kleiner als der Exponent von κ. Damit ist $\lambda < \kappa$ und damit $\beta' < \beta$.

Da sich die Herleitung unter $\Gamma_3 \vdash \Theta_3$ nicht verändert hat, hat sich nach Lemma 25 die Ordinalzahl der gesamten Herleitung verringert. □

Theorem 27 (Transfinite Induktion). *$<$ ist eine Wohlordnung auf den Ordinalzahlrepräsentationen nach Def. 22.*

Zum Beweis. In der Mengenlehre lässt sich zeigen, dass die Ordnung $<$ auf den hier benutzten Ordinalzahlrepräsentationen isomorph zu ϵ_0 ist, wobei die Ordinalzahlrepräsentationen genau den Cantor-Normalformen entsprechen. □

Daraus folgt nun:

Theorem 28 (Wiederholung von Theorem 9). *Sei A eine Sequenzenmenge gemäß Def. 6. Dann ist A im um die Induktion bis ω (Def. 5) erweiterten Sequenzenkalkül konsistent.*

Beweis. Angenommen, A mit Induktion ist inkonsistent. Dann gibt es eine Widerspruchsherleitung $\mathcal{D}_0$, aus der man durch iterierte Anwendung des

Reduktionsschrittes eine unendliche Folge $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, ...$ von Widerspruchsherleitungen erhält, sodass gilt: $Ord(\mathcal{D}_i) > Ord(\mathcal{D}_{i+1})$. Damit hat ϵ_0 eine unendliche absteigende Kette. Widerspruch. □

Da in Bsp. 7 gezeigt wurde, dass sich die Arithmetik im Sinne von Def. 6 formalisieren lässt, erhalten wir nun:

Korollar 29. *Die erststufige Arithmetik ist konsistent.*

Die besondere Bedeutung von Gentzens Beweis resultiert daraus, dass er bereits in der um die transfinite Induktion bis ϵ_0 erweiterten Arithmetik durchgeführt werden kann.

Beweis (Skizze). Hierzu kann man eine geeignete Gödelisierung der Ordinalzahlen unter ϵ_0 defieren, sodass die Ordnung der Ordinalzahlen durch eine Formel der Arithmetik repräsentiert wird. Die transfinite Induktion bis ϵ_0 kann dann als Axiomenschema oder Schlussregel zur Arithmetik hinzugenommen werden:

$TI_{\epsilon_0} : \forall x((\forall y \triangleleft x : \phi(y)) \to \phi(x)) \to \forall x \phi(x)$ für alle Formeln ϕ

wobei $\triangleleft$ eine arithmetische Repräsentierung der Ordnung der Ordinalzahlen symbolisiert.

Da die Zuordnung der Ordinalzahlen zu Beweisbäumen berechenbar ist, existiert eine arithmetische Formel $\sigma(x)$ mit $\mathbb{N} \models \sigma(\overline{\alpha}) \Leftrightarrow$ *es gibt eine Widerspruchsherleitung mit Ordinalzahl* α.

Führt man den Beweis von Theorem 26 in der Arithmetik aus, erhält man zunächst: $A \vdash \forall x(\sigma(x) \to \exists y \triangleleft x : \sigma(y))$, wobei A eine Axiomatisierung der Arithmetik bezeichnet. Durch Kontraposition erhält man: $A \vdash \forall x((\forall y \triangleleft x : \neg\sigma(y)) \to \neg\sigma(x))$. Dann gilt $A, TI_{\epsilon_0} \vdash \forall x \neg\sigma(x)$ und damit $A, TI_{\epsilon_0} \vdash \neg\overline{Thm_A}(\perp)$ (wobei $\overline{Thm_A}(x)$ die Σ_1-Formel für „x kodiert ein Theorem von A" bezeichnet), d.h. aus der Arithmetik mit ϵ_0-Induktion folgt die Konsistenz der Arithmetik ohne ϵ_0-Induktion. Die Konsistenz von Arithmetik inklusive ϵ_0-Induktion lässt sich so dagegen nach dem zweiten Unvollständigkeitssatz nicht beweisen. □

Zusätzlich ist Gentzens Beweis in dem Sinne "optimal", dass Induktion bis zu jeder niedrigeren Ordinalzahl nicht genügen würde, da die Peano-Arithmetik die transfinite Induktion bis zu jeder Ordinalzahl unter ϵ_0 beweist. Umgekehrt ließe sich der Beweis für die Arithmetik ohne ω-Induktion bereits mit Induktion bis ω durchführen, wenn man ω in Def. 24 durch eine natürliche Zahl größer 2 ersetzt. Dies ist möglich, da im Beweis von Theorem 26 nur die Induktions-Reduktion transfinite Ordinalzahlen erfordert, weil keine natürlich-wertige Funktion der Ordinalzahl vor der Reduktion die Ordinalzahl nach der Reduktion beschränkt, da diese in Abhängigkeit von $\overline{n}$ unterhalb ω unbegrenzt wachsen kann.

Literatur

[1] Gerhard Gentzen. Untersuchungen über das logische Schließen II. *Mathematische Zeitschrift*, 39:405–431, 1935.

[2] Gerhard Gentzen. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises fur die reine Zahlentheorie. *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, 4:17–44, 1938.