

# FLUIDODINÁMICA DE CHORROS LAMINARES LIGEROS.

Javier Urzay Lobo \*

1 de Septiembre de 2005



## Proyecto Fin de Carrera.<sup>1</sup>

Ingeniería Industrial: Tecnologías Energéticas.

Área de Mecánica de Fluidos. Universidad Carlos III de Madrid. Leganés (España).

### Introducción

La descarga de un chorro laminar axilsimétrico sumergido en una atmósfera en reposo puede describirse mediante las ecuaciones de Navier-Stokes. Éstas pueden simplificarse con hipótesis de régimen laminar y aproximación de Capa Límite a las ecuaciones de Prandtl con un error del orden de  $Re_j^{-2}$ , donde  $Re_j = U_j a / \nu_j$  es el número de Reynolds del chorro emergente basado en el radio del orificio  $a$ . Para ello ha de cumplirse  $Re_j \gg 1$  si bien ha de ser moderadamente pequeño para que el estado estacionario permanezca hidrodinámicamente estable. La velocidad de descarga del chorro  $U_j$  se asume mucho menor que la velocidad del sonido, por lo que el flujo puede describirse mediante consideraciones de incompresibilidad. Se particulariza para mezclas Helio-Aire e Hidrógeno Molecular-Aire, en cuyo caso se considera flujo no reactivo a números de Damköhler infinitamente pequeños  $Da \ll 1$ , donde  $Da = t_r / t_q$  con  $t_r = Re_j a / U_j$  el tiempo característico de residencia de la partícula de Hidrógeno en la zona de desarrollo y  $t_q$  el tiempo químico característico de reacción. El chorro queda separado del ambiente exterior mediante una capa anular de mezcla, cuyo espesor  $\delta$  es, a distancias del orden de la longitud de entrada  $Re_j a$ , del mismo orden que la longitud característica transversal de entrada  $a$ . A distancias del orden de  $Re_j a$  la velocidad axial se ve reducida considerablemente por efecto de la viscosidad. Soluciones de semejanza en el campo lejano fueron calculadas ya previamente por Schlichting[1] de forma analítica y verificadas experimentalmente por Andrade y Tsien[2],

en el caso de un chorro y un ambiente de la misma composición.

Definiendo  $\epsilon = W_j / W_o$  como el cociente de pesos moleculares del chorro emergente y del ambiente circundante, se estudia el límite asintótico  $\epsilon \rightarrow 0$  y se particulariza para el caso de  $H_2$ -Aire ( $\epsilon = 0,069$ ) y Helio-Aire ( $\epsilon = 0,138$ ). Debido a la disparidad de densidades dada por  $\epsilon = \rho_j / \rho_o \ll 1$ , aparece una fuerza de flotación positiva cuya intensidad viene dada por  $G = (F^2 \epsilon)^{-1}$ , donde  $F = U_j / \sqrt{Re_j a g}$  es el número de Froude. Para flujos a altos números de Froude  $F \gg \epsilon^{-1/2}$  se puede prescindir de la interacción gravitatoria. En este caso se analiza el comportamiento de las variables fluidodinámicas por técnicas de semejanza en el campo cercano y en el campo lejano, reduciendo en cada situación el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas. En particular, el campo cercano se resuelve numéricamente mediante técnicas de disparo dada la imposibilidad de obtención de una solución analítica, mientras que el campo lejano posee solución exacta para valores de  $\epsilon = 0$ .

Se realiza un último contraste solucionando el problema completo mediante las ecuaciones de Prandtl a altos números de Froude  $F \gg \epsilon^{-1/2}$  y a números de Froude moderados  $F \sim O(\epsilon^{-1/2})$ , implementando numéricamente un Método Implícito en Diferencias Finitas, dada la naturaleza parabólica de dicho problema diferencial, obteniendo así la estructura general del campo fluidodinámico.

---

\*jurzay@ucsd.edu

<sup>1</sup>Dirigido por:

Dr. Mario Sánchez Sanz, Área de Mecánica de Fluidos, Universidad Carlos III de Madrid.

Dr. Antonio L. Sánchez Pérez, Catedrático, Área de Mecánica de Fluidos, Universidad Carlos III de Madrid.

## Agradecimientos.

*Agradezco a todo el personal pasado y presente del Área de Mecánica de Fluidos de la Universidad Carlos III de Madrid, especialmente a D. Antonio Luis Sánchez Pérez, Dña. Inmaculada Iglesias Estradé y D. Carlos Martínez Bazán por otorgarme la posibilidad de iniciarme en labores de investigación científica cuando tan sólo tenía 21 años.*

*Ellos no sólo me han transmitido una parte de su extraordinaria capacidad técnica, sino además me han enseñado indirectamente que es su cercanía a los alumnos y su humildad lo que les hace verdaderamente grandes.*

*Leganés, a 1 de Septiembre del 2005.*

*"It is difficult to say what is impossible,  
for the dream of yesterday  
is the hope of today  
and the reality of tomorrow.†"*

† Ph.D. Robert H. Goddard (1882-1945),  
inventor del primer cohete de combustible líquido  
gasolina-LOx, así como del primer  
motor-cohete de empuje variable.



R.H. Goddard en el primer lanzamiento,  
Auburn, Massachusetts, 16 Marzo 1926

# Índice general

<b>1. Formulación Analítica Generalizada.</b>	<b>4</b>
1.1. Hipótesis Fundamentales. . . . .	4
1.2. Formulación Dimensional Generalizada. . . . .	5
1.3. Densidad de una Mezcla Gaseosa Binaria. . . . .	7
1.4. Coeficientes de Transporte de una Mezcla Gaseosa Binaria. . . . .	8
1.4.1. Viscosidad de las Sustancias Componentes. . . . .	8
1.4.2. Coeficiente de Difusión de la Mezcla. . . . .	8
1.4.3. Viscosidad de una Mezcla Gaseosa Binaria: Modelo de Wilke. . . . .	8
1.4.4. Viscosidad de una Mezcla Gaseosa Binaria: Modelo de Rosner. . . . .	10
1.4.5. Comparativa entre los Modelos de Wilke y Rosner de Viscosidad. Validación Experimental. . . . .	10
1.5. Formulación Adimensional Generalizada. . . . .	11
1.5.1. Leyes Integrales de Conservación. . . . .	12
<b>2. Solución de Semejanza en el Campo Cercano.</b>	<b>13</b>
2.1. Consideraciones Previas. . . . .	13
2.2. Formulación Generalizada. . . . .	13
2.3. Solución Numérica para $\epsilon \ll 1$ y $\epsilon > 0$ . . . . .	15
2.3.1. Método de Multi-Disparo No Lineal. . . . .	15
2.3.2. Solución Numérica Particularizada para Mezclas He-Aire. . . . .	16
2.3.3. Solución Numérica Particularizada para Mezclas $H_2$ -Aire. . . . .	17
2.3.4. Dependencia de la Solución con el Número de Schmidt. . . . .	17
2.4. Solución Numérica para $\epsilon \equiv 0$ . . . . .	18
2.4.1. Método de Multi-Disparo No Lineal para $\epsilon \equiv 0$ . . . . .	19
2.4.2. Solución Numérica Particularizada para Mezclas Infinitamente Ligeras de $H_2$ -Aire. . . . .	20
<b>3. Solución de Semejanza en el Campo Lejano.</b>	<b>21</b>
3.1. Consideraciones Previas. . . . .	21
3.2. Comportamiento del Mecanismo de Difusión Molecular en el Campo Lejano. . . . .	21
3.3. Formulación Generalizada. . . . .	22
3.4. Solución Analítica para Chorros Infinitamente Ligeros $\epsilon \equiv 0$ . . . . .	23
<b>4. Solución General del Campo Fluidodinámico.</b>	<b>26</b>
4.1. Simulación Numérica. . . . .	27
4.1.1. Transformación de Coordenadas. . . . .	27
4.1.2. Esquema Numérico. . . . .	29
4.2. Solución General Numérica Particularizada para Mezclas $H_2$ -Aire y He-Aire a altos números de Froude: $F \gg \epsilon^{-1/2}$ . . . . .	32
4.3. Solución General Numérica Particularizada para Mezclas $H_2$ -Aire a números de Froude moderados: $F \sim O(\epsilon^{-1/2})$ . . . . .	35
<b>A. Chorro Laminar Axilsimétrico: Solución de Schlichting (Campo Lejano) para <math>\epsilon = 1</math>.</b>	<b>37</b>
<b>B. Chorro Laminar Axilsimétrico: Solución de Blasius (Campo Cercano) para <math>\epsilon = 1</math>.</b>	<b>40</b>
<b>C. Validación del Código Numérico:</b>	
<b>Solución General Numérica de un Chorro Laminar Axilsimétrico con <math>\epsilon = 1</math>.</b>	<b>42</b>
<b>D. Códigos Numéricos.</b>	<b>44</b>
D.1. Integrador del Problema General y Mallador. . . . .	44
D.2. Integradores del Campo Cercano. . . . .	48

# Capítulo 1

## Formulación Analítica Generalizada.

### 1.1. Hipótesis Fundamentales.

El campo fluido resultante de un flujo en configuración de chorro emergente sin coflujo ha sido ya ampliamente analizado por Schlichting [1] en el caso tridimensional con axilsimetría. Existe una solución exacta del campo lejano de velocidades, calculada con técnicas de semejanza, que se ajustan ampliamente bien a las experimentaciones llevadas a cabo por Andrade [2]. Asumiendo que el chorro emergente de gas con viscosidad cinemática  $\nu_j$  descarga por un orificio de diámetro  $2a$  con una velocidad de entrada  $U_j$  mucho menor que la velocidad del sonido basada en la temperatura de entrada  $c = \sqrt{\gamma_j R_{gj} T_j}$ , se define el número de Reynolds del problema como  $Re_j = U_j a / \nu_j$  basado en la distancia característica transversal de entrada  $a$ . Igualmente se define el número de Mach para este flujo como  $M = U_j / c$ . Del mismo modo, el número de Froude del problema basado en la longitud característica de entrada se define como  $F = U_j / \sqrt{Re_j a g}$ .

Asumiendo que los fenómenos de convección predominan sobre el mecanismo de reacción química, o lo que es igual, el tiempo característico de residencia  $t_r \sim Re_j a / U_j$  de la partícula de Hidrógeno es mucho menor que el tiempo químico  $t_q$  de reacción, entonces el número de Damkhöler  $Da = t_r / t_q$  es lo suficientemente pequeño  $Da \ll 1$  por lo que se puede considerar flujo no reactivo, por otra parte impedido por la moderada temperatura  $T_j$  empleada aquí. En particular, para  $Re_j \gg 1$  el campo fluido resultante será lo suficientemente esbelto como para que las ecuaciones de Prandtl de capa límite sean válidas en este contexto, esto es, la distancia característica transversal de variación de la velocidad es mucho menor que la distancia característica longitudinal de variación de dicha velocidad axial. Por otro lado, el número de Reynolds  $Re_j$  deberá ser lo suficientemente pequeño como para que el estado estacionario permanezca estable y no aparezcan inestabilidades propias de regímenes turbulentos. Del mismo modo, se asume que el número de Mach  $M \ll 1$ , con lo que el flujo puede considerarse como incompresible, aún a pesar de que eventualmente la densidad  $\rho$  será una función de las coordenadas espaciales debido a cambios de composición, pero no debido a efectos de compresibilidad. Debido a la presencia de la aceleración gravitacional  $g$  y a la disparidad de densidades de ambos componentes, aparecerá una fuerza de flotación positiva  $G$  que colabora en la aceleración del chorro. Esta fuerza de flotación es inversamente proporcional al cuadrado del número de Froude,  $G \sim 1/F^2$  basado en la longitud de entrada del chorro. Se demuestra que en el campo cercano de desarrollo esta fuerza de flotación tiene escasa importancia comparado con su efecto a distancias longitudinales del orden de la longitud de entrada. Igualmente, en zonas externas a la capa de mezcla donde sólo existe aire, esta fuerza de flotación es nula, puesto que el ambiente circundante no puede ejercer un efecto de flotación sobre sí mismo.

Si el chorro emerge con un peso molecular  $W_j$  hacia una atmósfera de peso molecular  $W_o$ , se puede definir  $\epsilon = W_j / W_o \ll 1$  como parámetro fundamental del problema. En el caso de una mezcla  $H_2$ -Aire,  $\epsilon = 0,069$ ; mientras que para una mezcla He-Aire,  $\epsilon = 0,138$ . A medida que la sustancia ligera penetra en la atmósfera circundante, se producirá un mezclado de ambos mediante mecanismos de difusión molecular y convección macroscópica. La importancia del fenómeno de difusión molecular comparado con el fenómeno de difusión viscosa de cantidad de movimiento, es medido por el número de Schmidt del chorro:  $S = \nu_j / D$ , donde  $D$  representa el coeficiente de difusión binario de la mezcla. Considerando nulos los efectos de inhomogeneidad de fuerza másica, y de Termodifusión y Barodifusión por no existir gradientes de temperatura ni de presión considerables comparados con la temperatura y presión mismas, el mecanismo de difusión molecular es descrito en primera aproximación por la Ley de Fick:  $Y \mathbf{V} = -D \nabla Y$ , donde  $\mathbf{V}$  representa el vector velocidad de difusión e  $Y$  es la fracción másica de la sustancia ligera. Por otro lado, suponiendo ambos fluidos como Newtonianos, las leyes de difusión viscosa están representadas en una aproximación de primer orden por esfuerzos cortantes proporcionales a los gradientes de velocidad:  $\tau' = 2\mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ , siendo  $\mu$  la viscosidad molecular de la mezcla, la cual será en general una función de las coordenadas espaciales.

## 1.2. Formulación Dimensional Generalizada.

Un gas ideal de peso molecular  $W_j$ , densidad  $\rho_j$  y viscosidad dinámica  $\mu_j$ , descarga a velocidad  $U_j$  a través de un orificio de diámetro  $2a$  a una cavidad de diámetro infinitamente más grande (ver figura 1.1), en la que se encuentra una atmósfera en reposo compuesta de otro gas ideal a la misma presión y temperatura, de peso molecular  $W_o$ , densidad  $\rho_o$  y viscosidad dinámica  $\mu_o$ . Bajo las hipótesis de estacionariedad de flujo y de las enunciadas anteriormente, las ecuaciones de Navier-Stokes pueden escribirse en notación vectorial:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \bar{g} \quad (1.2)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla Y = -\nabla \cdot (\rho Y \mathbf{V}) \quad (1.3)$$

donde (1.1) representa Continuidad, (1.2) Cantidad de Movimiento, y (1.3) Conservación de la Especie emergente del chorro. Las expresiones anteriores están escritas en función de la densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  promedio de la mezcla. En general ambos valores serán una función de las coordenadas espaciales. El valor  $\mathbf{V}$  representa el vector velocidad de difusión, que puede relacionarse con el gradiente de fracción másica mediante la Ley de Stefan-Maxwell del transporte de masa. En particular, despreciando los efectos de Barodifusión, Termodifusión y transporte por inhomogeneidad de fuerza másica, la Ley de Stefan-Maxwell se reduce a la Ley de Fick, que para una mezcla binaria puede escribirse como:

$$Y \mathbf{V} = -D \nabla Y \quad (1.4)$$

en función de un coeficiente de difusión binario  $D$  representativo de la mezcla.

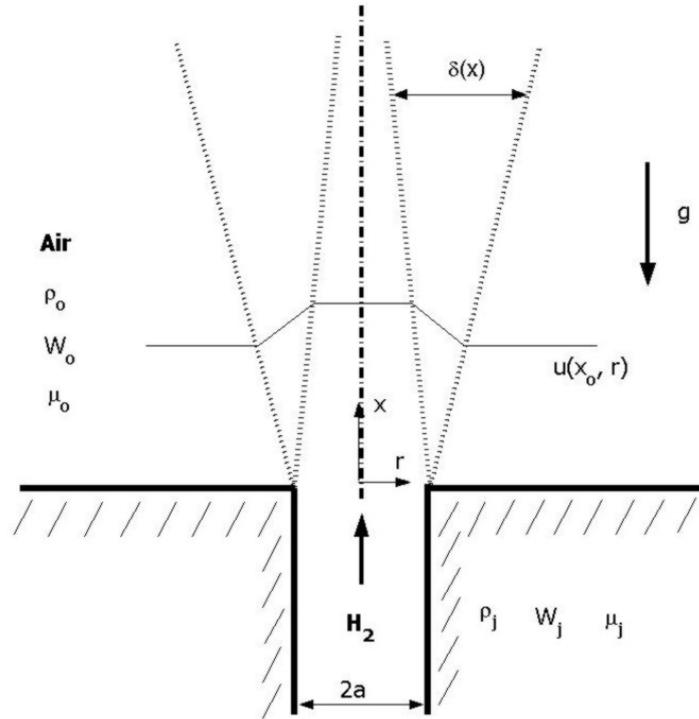


Figura 1.1: Geometría del flujo.

A medida que el chorro penetra en la atmósfera, se producirá una capa anular de mezcla de espesor característico  $\delta$ , que en general será una función de la distancia axial respecto de la entrada. Comparando el término de convección longitudinal de la ecuación de Cantidad de Movimiento con el término de difusión transversal, a distancias axiales del orden de  $Re_j a$  la velocidad se verá reducida en valores del orden de sí misma por efectos de la viscosidad, habiendo crecido la capa de mezcla hasta espesores del orden del radio del orificio. La evolución del crecimiento del espesor de la capa de mezcla como función de la distancia axial  $x$  será aproximadamente  $\delta \sim \sqrt{\nu_j / (U_j x)} = x Re_j^{-1/2}$ . Dado que  $Re_j \gg 1$ , entonces la longitud de entrada  $Re_j a \gg a$ . De lo anterior se deduce que a distancias axiales menores que dicha longitud el espesor  $\delta$  de la capa de mezcla será en general

mucho menor que la coordenada axial  $x$ , siendo las variaciones transversales de las magnitudes fluidas mucho mayores que las variaciones longitudinales. Para valores de  $x$  del orden de la longitud de entrada  $Re_j a$ , se comprueba que  $\delta \sim a$ . Si el número de Reynolds basado en el radio del orificio no es lo suficientemente grande como para que aparezcan inestabilidades hidrodinámicas, entonces se puede asegurar que la capa de mezcla permanecerá estable por resultar el número de Reynolds basado en su espesor característico  $Re_{j\delta} = Re_j^{1/2} \ll Re_j$  para distancias longitudinales del orden de  $a$ , y  $Re_{j\delta} = Re_j$  para distancias longitudinales del orden de la longitud de entrada. En particular, el flujo puede describirse en estas condiciones mediante la aproximación de capa límite con errores del orden de  $Re_j^{-2}$ . Bajo estas condiciones, las variaciones de presión transversal y longitudinal son del orden de la presión dinámica transversal y longitudinal respectivamente:  $\Delta_x P \sim \rho u^2$  y  $\Delta_r P \sim \rho v^2$ . De este modo, las variaciones de presión transversales son despreciables comparadas con las variaciones de presión longitudinales:

$$\frac{\Delta_r P}{\Delta_x P} \sim \frac{v^2}{u^2} \sim \left(\frac{\delta}{Re_j a}\right)^2 \sim \frac{1}{Re_j} \ll \ll 1$$

De lo anterior se deduce que para cada coordenada longitudinal  $x$  la presión externa se puede considerar aproximadamente igual a la presión interna de la capa límite y subsecuentemente del chorro emergente. Dado que el ambiente exterior está en reposo, la distribución de presión estática viene dada por la Hidrostática<sup>1</sup>.

$$P = P_o - \rho_o g x$$

donde  $P_o$  es una constante representativa de la presión de referencia en el fondo. Introduciendo este último resultado en la ecuación (1.2), y haciendo uso de la aproximación de capa límite:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v r) = 0 \quad (1.5)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + (\rho_o - \rho) g \quad (1.6)$$

$$\rho u \frac{\partial Y}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \rho \frac{\partial Y}{\partial r} \right) \quad (1.7)$$

donde se han despreciado las variaciones longitudinales de la velocidad en los términos de difusión. Se han particularizado los operadores diferenciales para un sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, x)$  dotado de axilsimetría. El vector velocidad ha sido descompuesto en una componente radial  $v$  y una componente axial  $u$ .

En la ecuación (1.6) puede observarse el último término de la derecha como representativo de la fuerza de flotación. Para regiones en las que la densidad  $\rho$  sea menor que la densidad del ambiente  $\rho_o$ , este término colaborará positivamente en la aceleración del flujo. En regiones en las que la densidad predominante sea la del ambiente, este término se anula y no colabora en el campo fluidodinámico.

El problema (1.5)-(1.6)-(1.7) ha de ser integrado con las condiciones de contorno apropiadas:

$$x = 0 : \begin{cases} 0 < r < a : & u = U_j, \quad Y = Y_j = 1, \\ r > a : & u = 0, \quad Y = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$x > 0 : \begin{cases} r = 0 : & \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial Y}{\partial r} = v = 0, \\ r \rightarrow \infty : & u \rightarrow 0, \quad Y \rightarrow 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

donde se supone que el fluido emergente del chorro está totalmente compuesto de sustancia ligera, esto es,  $Y_j = 1$ .

---

<sup>1</sup>Es conocido que la distribución hidrostática de presiones en un ambiente gaseoso isoterma no sigue una ley lineal de presiones como en líquidos. En efecto, para gases se cumple que la presión  $P$  a cierta altura  $x$  puede escribirse mediante la distribución de Boltzmann  $P(x) = P_o e^{-gx/R_g T}$ , expresión que puede ser linealizada entorno a  $x \rightarrow 0$  mediante un desarrollo de Taylor:  $P(x) \sim P_o - \rho_o g x + O(x^2)$

### 1.3. Densidad de una Mezcla Gaseosa Binaria.

Dado que ambas sustancias son consideradas como gases ideales, la densidad promedio puede calcularse mediante la ecuación de estado termodinámico:

$$\rho = \frac{P\bar{W}}{R^\circ T} \quad (1.10)$$

donde  $P$  y  $T$  son la presión y temperatura de descarga del chorro,  $R^\circ = 8,314J/molK$  es la constante universal del gas ideal, y  $\bar{W}$  es el peso molecular promedio de la mezcla. Para el caso de una mezcla isotérmica de  $N$  componentes,  $\bar{W}$  puede calcularse como:

$$\bar{W} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{W_i}} \quad (1.11)$$

y particularizando para  $N = 2$ :

$$\bar{W} = \frac{W_j}{Y + \frac{W_j}{W_o}(1 - Y)} = \frac{W_j}{Y + \epsilon(1 - Y)} \quad (1.12)$$

con  $\epsilon = W_j/W_o = \rho_j/\rho_o$ . Por tanto, la densidad puede escribirse como:

$$\rho = \frac{P}{R^\circ T} \left( \frac{W_j}{Y + \epsilon(1 - Y)} \right) = \rho_j \left( \frac{1}{Y + \epsilon(1 - Y)} \right) \quad (1.13)$$

En la figura siguiente puede observarse la evolución de  $\rho/\rho_j$  con la fracción másica  $Y$  y la dependencia respecto del parámetro  $\epsilon$ :

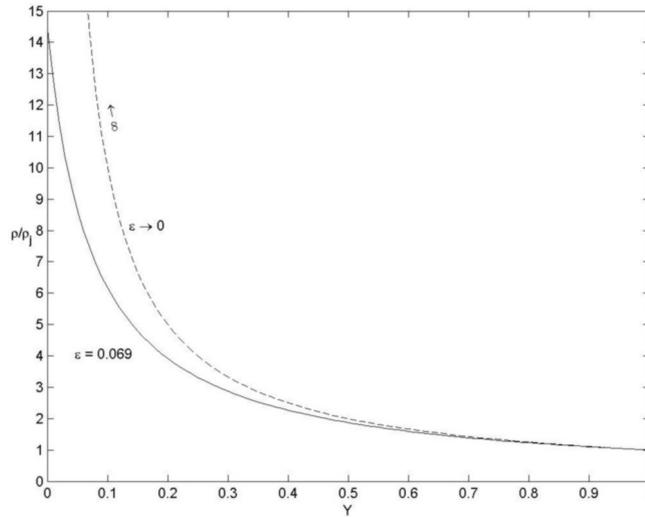


Figura 1.2: Densidad adimensionalizada  $\rho/\rho_j$  en función de la fracción másica  $Y$  para el caso de Hidrógeno-Aire  $\epsilon = 0,069$  y para un chorro infinitamente ligero  $\epsilon \rightarrow 0$ .

De lo anterior se deriva que para  $Y \sim 1$ , los valores del peso molecular medio y la densidad media son muy parecidos a los del chorro, esto es,  $\bar{W} \sim W_j$  y  $\rho \sim \rho_j$ , por lo que  $\rho/\rho_j \rightarrow 1$ . Para regiones en las que no hay presencia de la sustancia ligera  $Y \sim 0$  y entonces  $\bar{W} \sim W_o$  y  $\rho \sim \rho_o$ , cumpliéndose  $\rho/\rho_j \rightarrow 1/\epsilon$ . Para valores de  $Y \sim \epsilon$  entonces  $\rho/\rho_j \sim 1/2\epsilon$ . Un caso de particular interés es el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , que representa un chorro infinitamente ligero. En este caso la densidad y el peso molecular son inversamente proporcionales exclusivamente a la fracción másica del componente ligero, alcanzando valores infinitos donde no existe presencia de dicho componente. Esto haría pensar que no existe solución al problema  $\epsilon = 0$ , sino que habría que retener este parámetro como parte de la formulación. La ecuación (2.13) indica claramente una forma de adimensionalizar la densidad:

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_j} = \frac{1}{Y + \epsilon(1 - Y)} \quad (1.14)$$

De ahora en adelante se omitirá el signo ' para designar la densidad adimensional, por lo que  $\rho' = \rho$ .

## 1.4. Coeficientes de Transporte de una Mezcla Gaseosa Binaria.

### 1.4.1. Viscosidad de las Sustancias Componentes.

Para calcular las viscosidades de los componentes, particularizados en una mezcla de Hidrógeno-Aire, se utiliza un modelo basado en el Potencial de Lennard-Jones, véase [3]. Para gases de baja densidad, se demuestra que la viscosidad  $\mu$  es aproximadamente independiente de la temperatura, y proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura  $T$ . Además, muestra una dependencia respecto del tamaño de la molécula  $\sigma$ , del peso molecular  $W$ , de una función  $\Omega^{(2,2)*}(T^*)$  que representa la desviación del modelo de partícula rígida y esférica, y de la temperatura reducida  $T^*$  que es función a su vez de parámetros energéticos efectivos de interacción:

$$\mu = 2,6693 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{WT}}{\sigma^2 \Omega^{(2,2)*}(T^*)} \left[ \frac{Kg}{m \cdot s} \right] \quad (1.15)$$

Los parámetros del Potencial de Lennard-Jones pueden encontrarse tabulados (véase [3]). En particular, para el Hidrógeno molecular se tiene a una temperatura  $T = 300K$  ( $26,8^\circ C$ ), que  $\sigma = 2,968\text{\AA}$ ,  $T^* = 9$ ,  $W = 2,016g$  y  $\Omega^{(2,2)*} = 0,8379$ , obteniéndose una viscosidad de  $\mu_{H_2} = 8,86 \cdot 10^{-6} Kg/ms$ . Para el Aire, se tiene  $\sigma = 3,617\text{\AA}$ ,  $T^* = 3,09$ ,  $W = 28,94g$  y  $\Omega^{(2,2)*} = 1,031$ , obteniéndose una viscosidad  $\mu_A = 1,84 \cdot 10^{-5} Kg/ms$ . Para el Helio, se tiene  $\sigma = 2,576\text{\AA}$ ,  $T^* = 29,35$ ,  $W = 4,003g$  y  $\Omega^{(2,2)*} = 0,7032$ , obteniéndose una viscosidad<sup>2</sup>  $\mu_{He} = 1,99 \cdot 10^{-5} Kg/ms$ .

Una vez obtenidas las viscosidades dinámicas  $\mu$  se puede calcular la viscosidad cinemática de cada componente sin más que dividir por la densidad  $\nu = \mu/\rho$ , donde  $\rho = PW/R^\circ T$  viene dada por la ecuación de estado, a una presión  $P = 1atm$  y una temperatura  $T = 300K$ . De este modo, se obtiene para el Hidrógeno  $\rho_{H_2} = 81,9g/m^3$  y  $\nu_{H_2} = 1,082 \cdot 10^{-4} m^2/s$ . Mientras que para el Aire  $\rho_A = 1,18Kg/m^3$  y  $\nu_A = 1,57 \cdot 10^{-5} m^2/s$ . Para el Helio  $\rho_{He} = 0,163Kg/m^3$  y  $\nu_{He} = 1,218 \cdot 10^{-4} m^2/s$ .

### 1.4.2. Coeficiente de Difusión de la Mezcla.

Para calcular el coeficiente de difusión binario  $D$  de la mezcla, se utilizará también un modelo basado en el Potencial de Lennard-Jones, en particular la fórmula de Chapman-Enskog [3]. En este caso, los parámetros del potencial son  $\sigma_{12}^2$ ,  $T_{12}^*$  y  $\Omega^{(1,2)*}(T_{12}^*)$  característicos de la interacción entre ambos elementos. En particular, el coeficiente de difusión depende muy ligeramente de la composición local de la mezcla, por lo que en general no será una función de las coordenadas espaciales. Por otro lado, el coeficiente de difusión es proporcional a la raíz cuadrada del cubo de la temperatura  $T$  e inversamente proporcional a la presión  $P$ :

$$D = 2,628 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{T^3(W_1 + W_2)/(2W_1W_2)}}{P\sigma_{12}^2\Omega^{(1,1)*}(T_{12}^*)} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (1.16)$$

Para el caso de una mezcla Hidrógeno-Aire a una temperatura  $T = 300K$  y presión  $P = 1atm$ , se obtiene  $\sigma_{12} = 1/2(\sigma_{H_2} + \sigma_A) = 3,292\text{\AA}$ ,  $T_{12}^* = \sqrt{T_{H_2}^* T_A^*} = 5,27$  y  $\Omega^{(1,1)*}(T_{12}^*) = 0,8340$ , obteniéndose un coeficiente de difusión  $D_{H_2-A} = 7,782 \cdot 10^{-5} m^2/s$ . Para una mezcla Helio-Aire a la misma presión y temperatura,  $\sigma_{12} = 3,096\text{\AA}$ ,  $T_{12}^* = 9,52$  y  $\Omega^{(1,1)*}(T_{12}^*) = 0,7486$ , obteniéndose un coeficiente de difusión  $D_{He-A} = 7,172 \cdot 10^{-5} m^2/s$ .

De lo anterior se obtiene un coeficiente número de Schmidt basado en la viscosidad cinemática de la sustancia ligera de  $S_{H_2} = \nu_{H_2}/D_{H_2-A} = 1,39$  y  $S_{He} = \nu_{He}/D_{He-A} = 1,69$ .

### 1.4.3. Viscosidad de una Mezcla Gaseosa Binaria: Modelo de Wilke.

Según este modelo ([5]), la viscosidad de una mezcla multicomponente puede calcularse basándose en consideraciones de la Teoría Cinética:

$$\mu = \sum_{i=1}^N \frac{X_i \mu_i}{\sum_{k=1}^N X_k \phi_{ik}} \quad (1.17)$$

donde  $X_i$  representa la fracción molar de cada componente, y  $\phi_{ik}$  es el denominado Parámetro de Intercolisión, función del peso molecular y viscosidad de cada componente según:

<sup>2</sup>Los valores obtenidos a partir de (1.15), ecuación obtenida de la referencia [3], y basada únicamente en consideraciones de la Teoría Cinética de los Gases, parecen estar en clara correspondencia con los datos experimentales obtenidos en [4] donde  $\mu_{H_2} = 8,89 \cdot 10^{-6} Kg/ms$ ,  $\mu_A = 1,86 \cdot 10^{-5} Kg/ms$ , y  $\mu_{He} = 1,99 \cdot 10^{-5} Kg/ms$ , a una temperatura  $T=300K$  y presión  $P=1atm$ .

$$\phi_{ik} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_k}\right)^{1/2} \left(\frac{W_k}{W_i}\right)^{1/4}\right]^2}{\left[8\left(1 + \frac{W_i}{W_k}\right)\right]^{1/2}} \quad (1.18)$$

de donde se puede demostrar que  $\phi_{ii} = 1$ . Particularizando para una mezcla bicomponente  $N = 2$ :

$$\mu = \frac{X\mu_j}{X\phi_{jj} + (1-X)\phi_{jo}} + \frac{(1-X)\mu_o}{X\phi_{oj} + (1-X)\phi_{oo}} = \frac{X\mu_j}{X + (1-X)\phi_{jo}} + \frac{(1-X)\mu_o}{X\phi_{oj} + (1-X)} \quad (1.19)$$

Los valores de  $\phi_{jo}$  y  $\phi_{oj}$  se calculan como:

$$\phi_{jo} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\mu_j}{\mu_o}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/4}\right]^2}{\left[8(1 + \epsilon)\right]^{1/2}} \quad (1.20)$$

$$\phi_{oj} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\mu_o}{\mu_j}\right)^{1/2} \epsilon^{1/4}\right]^2}{\left[8\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)\right]^{1/2}} \quad (1.21)$$

Para una mezcla binaria, la fracción molar  $X$  de la especie ligera viene dada por:

$$X = \frac{Y}{Y + \epsilon(1 - Y)} \quad (1.22)$$

de donde se deriva que para fracciones másicas  $Y \gg \epsilon$  con  $\epsilon \ll 1$ , entonces la fracción molar toma un valor muy cercano a la unidad  $X \sim 1$ , dado que para tal mezcla el peso molecular de la especie ligera es tan pequeño que para formarla se necesita un gran número de moles de ella respecto del número de moles total. Para fracciones másicas  $Y \sim \epsilon$ , entonces  $X \sim 1/2$ , por lo que la fracción molar es en casi todas partes de orden unidad, excepto allí donde la concentración másica en especie ligera es extraordinariamente pequeña. Para un chorro infinitamente ligero,  $\epsilon = 0$  y  $X = 1$  en todos lados, cumpliéndose que la viscosidad de la mezcla es siempre igual a la viscosidad de la especie ligera. Introduciendo (1.22) en (1.17), se obtiene:

$$\frac{\mu}{\mu_j} = \frac{Y}{Y + \phi_{jo}\epsilon(1 - Y)} + \frac{\epsilon(1 - Y)\frac{\mu_o}{\mu_j}}{Y\phi_{oj} + \epsilon(1 - Y)} \quad (1.23)$$

donde puede observarse que para fracciones másicas del orden de la unidad  $Y \sim 1$  teniendo en cuenta que  $\phi_{jo} \sim O(1)$  y  $\phi_{oj} \sim O(1)$ , entonces la viscosidad predominante es la viscosidad de la sustancia ligera  $\mu/\mu_j \sim 1$ . Por otro lado, para fracciones másicas  $Y \sim \epsilon$  o menores, entonces la viscosidad de la mezcla es muy parecida a la viscosidad del ambiente:  $\mu/\mu_j \sim \mu_o/\mu_j$ .

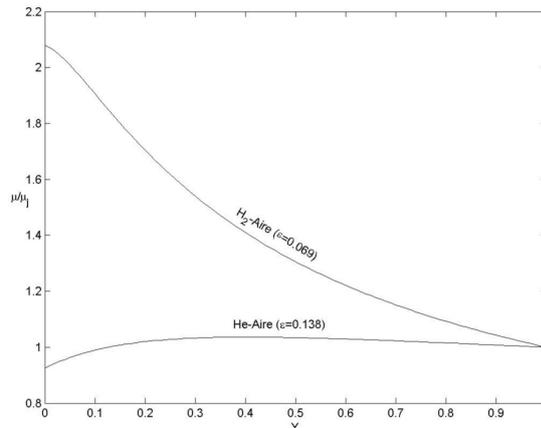


Figura 1.3: Viscosidad adimensionalizada  $\mu/\mu_j$  con en función de la fracción másica  $Y$  para el caso de Hidrógeno-Aire y Helio-Aire.

En la figura 2.5 puede observarse como para fracciones másicas  $Y \sim 1$  entonces la viscosidad adquiere un valor cercano a la viscosidad del  $H_2$  y del  $He$ , por lo que  $\mu/\mu_j \sim 1$ . Por otro lado, para valores de la fracción másica  $Y \sim \epsilon$ , entonces la viscosidad de la mezcla es muy parecida a la del Aire con  $\mu_A/\mu_{H_2} = 2,076$  y  $\mu_A/\mu_{He} = 0,925$ .

### 1.4.4. Viscosidad de una Mezcla Gaseosa Binaria: Modelo de Rosner.

Según [6] se puede obtener una buena aproximación para el cálculo de la viscosidad de una mezcla multi-componente mediante la regla de la raíz cuadrada:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{W_i} X_i \mu_i}{\sum_{i=1}^N \sqrt{W_i} X_i} \quad (1.24)$$

que particularizada para una mezcla binaria y adimensionalizada con la viscosidad de la sustancia ligera  $\mu_j$  queda:

$$\frac{\mu}{\mu_j} = \frac{\epsilon^{1/2} Y + \epsilon(1 - Y) \frac{\mu_o}{\mu_j}}{\epsilon^{1/2} Y + \epsilon(1 - Y)} \quad (1.25)$$

de donde se obtiene que para fracciones másicas del orden  $Y \sim \epsilon$ , entonces  $\mu/\mu_j \sim \mu_o/\mu_j$  y por tanto la viscosidad de la mezcla toma un valor muy parecido a la viscosidad del ambiente. Por el contrario, para fracciones másicas de orden unidad  $Y \sim 1$ , entonces  $\mu/\mu_j \sim 1$ , por lo que la viscosidad predominante es la de la especie ligera. Cabe destacar el caso de un chorro infinitamente ligero, para el cual se puede tomar el límite de (1.25) para  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu}{\mu_j} = 1 \quad (1.26)$$

por lo que se puede desarrollar en serie de Taylor  $\mu/\mu_j$  en torno a  $\epsilon \rightarrow 0$  para dar:

$$\frac{\mu}{\mu_j} \sim 1 + \epsilon^{1/2} \mu^* \quad (1.27)$$

siendo  $\mu^* = Y(1 - \mu_o/\mu_j)(Y - 1)/[4(\epsilon^{1/2} - 1) - 4\epsilon^{1/2}]^2$ . De aquí se observa que para chorros infinitamente ligeros la viscosidad predominante es la viscosidad de la sustancia ligera  $\mu_j$ . Este resultado elimina la dependencia de la viscosidad con las coordenadas espaciales, simplificando el modelo.

### 1.4.5. Comparativa entre los Modelos de Wilke y Rosner de Viscosidad. Validación Experimental.

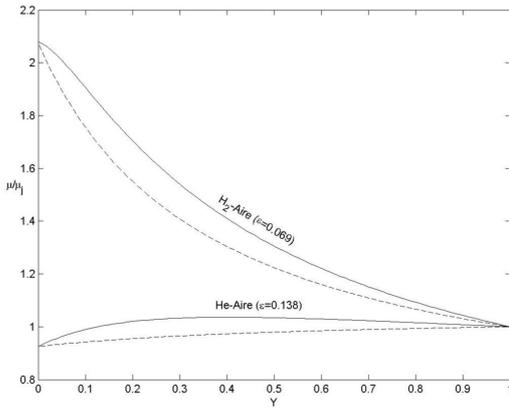


Figura 1.4: Comparación entre el modelo de Wilke (línea continua) y el modelo de Rosner (línea discontinua) para mezclas He-Aire e  $H_2$ -Aire en función de la fracción másica  $Y$ .

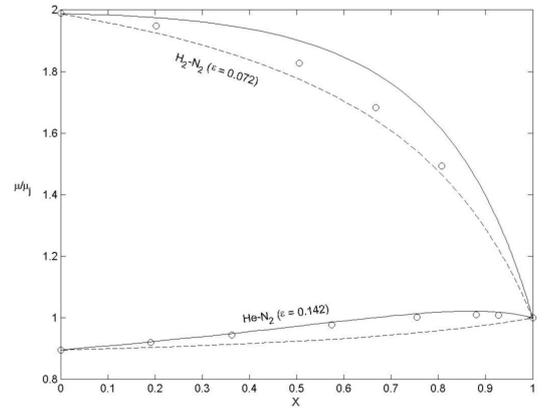


Figura 1.5: Validación experimental de ambos modelos, para mezclas He- $N_2$  e  $H_2 - N_2$  según las referencias [7] y [8]. En línea continua y discontinua se muestran los modelos analíticos de Wilke y Rosner respectivamente en función de la fracción molar  $X$ , mientras que los datos experimentales se sitúan en puntos circulares obtenidos de [7] para la mezcla  $H_2 - N_2$  y de [8] para la mezcla He- $N_2$ .

En la figura 1.4 puede observarse cómo el modelo de Rosner da siempre valores más conservadores de viscosidad que el modelo de Wilke, con la particularidad de que nunca da valores de viscosidad mayores que el mayor valor de viscosidad extremo. En la figura 1.5 se observa la evolución de ambos modelos en función de la fracción molar para mezclas He- $N_2$  e  $H_2 - N_2$  a 25°C y 19°C respectivamente, junto con los datos experimentales obtenidos de las referencias [8] y [7] respectivamente. Si bien ambos modelos permiten una descripción precisa de la viscosidad en función de la composición de la mezcla en cada punto del espacio, de ahora en adelante se utilizará el modelo de Rosner por una mayor simplicidad matemática.

## 1.5. Formulación Adimensional Generalizada.

Para adimensionalizar el problema, se utiliza como longitud característica transversal el radio del orificio  $a$  y como longitud característica axial la longitud de entrada hidrodinámica  $Re_j a$ . La velocidad característica axial será la velocidad de descarga del chorro  $U_j$ , mientras que la velocidad característica transversal  $\nu_j/a$  se obtiene sin más que aproximar los órdenes de magnitud de los términos de la ecuación de Continuidad. Por tanto, todas las variables fluidodinámicas de interés se pueden escribir de la siguiente forma adimensional <sup>3</sup>:

$$x' = \frac{x}{Re_j a}; \quad r' = \frac{r}{a}; \quad u' = \frac{u}{U_j}; \quad v' = \frac{v}{\nu_j/a}; \quad Y' = Y; \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_j}; \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_j}; \quad D' = \frac{D}{D_{oj}} \quad (1.28)$$

de forma que el problema (1.5)-(1.6)-(1.7)-(1.8)-(1.9) puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\rho \mathbf{u}) + \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\rho \mathbf{v} \mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (1.29)$$

$$\rho \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \mathbf{r} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{G}(\mathbf{1} - \epsilon \rho) \quad (1.30)$$

$$\rho \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}} + \rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\mathbf{S} \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \mathbf{r} \rho \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (1.31)$$

con la densidad y viscosidad dadas por:

$$\rho = \frac{1}{\mathbf{Y} + \epsilon(\mathbf{1} - \mathbf{Y})} \quad (1.32)$$

$$\mu = \frac{\epsilon^{1/2} \mathbf{Y} + \epsilon(\mathbf{1} - \mathbf{Y})\beta}{\epsilon^{1/2} \mathbf{Y} + \epsilon(\mathbf{1} - \mathbf{Y})} \quad (1.33)$$

En particular,  $S = \nu_j/D$  es el número de Schmidt del chorro emergente. En el caso de mezclas  $H_2$ -Aire y He-Aire, se calculó anteriormente los números de Schmidt respectivos  $S_{H_2} = \nu_{H_2}/D_{H_2-A} = 1,39$  y  $S_{He} = \nu_{He}/D_{He-A} = 1,69$ . El parámetro adimensional  $G = (\epsilon F^2)^{-1}$  mide la intensidad de la interacción gravitatoria, siendo  $F = U_j/\sqrt{Re_j a g}$  el número de Froude basado en la longitud de entrada. El parámetro  $\beta = \mu_o/\mu_j$  es el cociente de viscosidades de la sustancia pesada y la ligera. Para mezclas  $H_2$ -Aire y He-Aire, se tiene que  $\beta_{H_2} = 2,076$  y  $\beta_{He} = 0,925$ .

Las condiciones de contorno del problema son:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} : \begin{cases} \mathbf{0} < \mathbf{r} < \mathbf{1} : & \mathbf{u} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{1}, \\ \mathbf{r} > \mathbf{1} : & \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{x} > \mathbf{0} : \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{0} : & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r} \rightarrow \infty : & \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1.35)$$

Este problema ha de ser integrado numéricamente, si bien es posible extraer conclusiones a partir de técnicas de semejanza tanto para el campo cercano como para el campo lejano. En particular,  $\epsilon \ll 1$  aparece como parámetro fundamental del problema. En apartados sucesivos se comprobará que es posible prescindir de su presencia explícita tanto para el campo cercano como para el campo lejano. Esto es, existe solución del campo fluidodinámico para chorros infinitamente ligeros  $\epsilon = 0$ , integrada numéricamente para  $x \ll 1$  y analíticamente para  $x \gg 1$ .

Se puede extraer una conclusión importante al observar las ecuaciones de Cantidad de Movimiento (1.29) y de Conservación de la Especie ligera (1.30). Una comparación entre los coeficientes efectivos de difusión, muestra para  $\epsilon \rightarrow 0$  que la tasa de difusión de transporte de cantidad de movimiento dividida por la tasa de difusión efectiva de la sustancia ligera en el ambiente es del orden de  $S/\rho$ . Si  $Y \sim \epsilon$ , lo cual ocurre en el campo lejano, entonces  $S/\rho \ll 1$  pues  $S \sim 1$  y  $\rho \sim 1/Y$ . De lo anterior se deriva que la fracción másica  $Y$  de sustancia ligera se difundirá mucho más que la velocidad axial  $u$ . En particular, para distancias  $x$  lo suficientemente grandes, se tendrá  $1/r[\partial/\partial r(\rho r \partial Y/\partial r)] \sim 0$ , obteniendo un perfil de fracción másica  $Y \sim Y_o \Upsilon(x)$  constante en todo el radio característico de velocidad  $u$  del chorro.

<sup>3</sup>En posteriores expresiones se omitirá el signo ' a la hora de designar variables adimensionales.

### 1.5.1. Leyes Integrales de Conservación.

La ecuación de Cantidad de Movimiento (1.30) puede escribirse en Forma Conservativa como:

$$\frac{\partial(\rho u^2 r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + Gr(1 - \epsilon \rho) \quad (1.36)$$

la cual puede ser integrada en  $r$  para dar:

$$\int_0^\infty \frac{\partial(\rho u^2 r)}{\partial x} dr + \rho v u r \Big|_0^\infty = r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty Gr(1 - \epsilon \rho) dr \quad (1.37)$$

El segundo término de la izquierda se anula por ser  $v = 0$  en  $r = 0$ , y  $u \rightarrow 0$  en  $r \rightarrow \infty$ . El primer término de la derecha se anula también por ser  $\partial u / \partial r = 0$  en  $r = 0$  y  $r \rightarrow \infty$ . Permutando el operador diferencial con el signo integral se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \rho u^2 r dr = \int_0^\infty Gr(1 - \epsilon \rho) dr \quad (1.38)$$

e integrando respecto de  $x$ :

$$\int_0^\infty \rho u^2 r dr = \int_0^x \left\{ \int_0^\infty Gr(1 - \epsilon \rho) dr \right\} dx + C \quad (1.39)$$

siendo  $C = \int_0^\infty u_o^2 r dr = 1/2$  la constante de integración si el perfil de entrada en  $x = 0$  corresponde a un perfil uniforme  $u_o = 1$  para  $0 < r < 1$ . Notar que en  $x = 0$ , la interacción gravitatoria no ha logrado acelerar ninguna cantidad de fluido, y por lo tanto no ha colaborado a incrementar el flujo de cantidad de movimiento. Por tanto:

$$J(x) = \int_0^\infty \rho u^2 r dr = \int_0^x \left\{ \int_0^\infty Gr(1 - \epsilon \rho) dr \right\} dx + 1/2 \quad (1.40)$$

representa la Ley Integral de Conservación del flujo de cantidad de movimiento  $J$ . La expresión (1.38) representa el incremento sucesivo en  $x$  de flujo de cantidad de movimiento debido a la aceleración causada por la fuerza de flotación gravitacional. El flujo de cantidad de movimiento inicial se conservaría en caso de que  $G = 0$ , lo cual significaría números de Froude  $F$  extraordinariamente grandes. Físicamente este caso correspondería a un chorro exertado con una velocidad  $U_j$  tan grande que su inercia inicial sería enorme comparada con la inercia adicional ocasionada por la fuerza de flotación. En este caso la interacción gravitatoria no causaría ningún efecto sobre el chorro, y se tendría que  $J = 1/2$  para todo  $x$ .

Por otro lado, la ecuación de Conservación de Especies (1.31), puede ser también reescrita en Forma Conservativa como:

$$\frac{\partial(\rho u Y r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y v r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho \frac{\partial Y}{\partial r} \right) \quad (1.41)$$

e integrando respecto de  $r$ :

$$\int_0^\infty \frac{\partial(\rho u Y r)}{\partial x} dr + \rho v Y r \Big|_0^\infty = r \rho \frac{\partial Y}{\partial r} \Big|_0^\infty \quad (1.42)$$

la cual puede ser integrada respecto de  $x$ , teniendo en cuenta que la constante de integración se obtiene de las condiciones iniciales supuesto perfil uniforme de velocidades,  $C = \int_0^\infty \rho_o Y_o u_o r dr = 1/2$ . Se obtiene como resultado la conservación del gasto másico de sustancia ligera inyectada:

$$M = \int_0^\infty \rho Y u r dr = 1/2 \quad (1.43)$$

Las ecuaciones (1.40) y (1.43) constituyen las Leyes Integrales de Conservación del flujo de cantidad de movimiento  $J$  y gasto másico de sustancia ligera  $M$  respectivamente, y darán completitud al problema al formular las soluciones de semejanza.

## Capítulo 2

# Solución de Semejanza en el Campo Cercano.

### 2.1. Consideraciones Previas.

Observando la ecuación de Cantidad de Movimiento (1.29), uno puede darse cuenta de la escasa importancia del término gravitacional para distancias longitudinales mucho menores que el radio del orificio:  $x \ll 1$ . La especie ligera se difundirá progresivamente dentro del ambiente a través de la capa anular de mezcla, que en estos primeros momentos tiene un espesor característico  $\delta$  mucho menor que el radio del orificio  $a$ . Es de esperar pues que la fracción másica sea del orden  $Y \sim \epsilon$  dentro de la capa de mezcla inicial, y por tanto la densidad de la mezcla será aproximadamente  $\rho \sim 1/\epsilon$ . De lo anterior se deriva que el producto  $\rho\epsilon \sim O(1)$  y por lo tanto el término de flotación es despreciable frente los de convección y viscosidad en (1.30) por ser estos proporcionales a los gradientes de velocidad y por producirse en  $x \ll 1$  los máximos gradientes de las variables fluidodinámicas tanto transversal como axialmente. Por otro lado, de la Ley Integral de Conservación (1.40) del flujo de cantidad de movimiento, se observa que para  $x \ll 1$  la repercusión de la interacción gravitatoria como fuente de flujo de cantidad de movimiento es despreciable frente al flujo aportado por las condiciones de entrada, puesto que la cantidad de fluido acelerada es muy pequeña:  $\int_0^x \left\{ \int_0^\infty Gr(1-\epsilon\rho)dr \right\} dx \sim 0$  para  $x \ll 1$ .

Para simplificar el modelo se asumirá una viscosidad constante e igual a la viscosidad del chorro  $\mu_j$ , si bien se sabe que en el interior de la capa de mezcla la fracción másica tomará cualquier valor en el rango  $0 < Y < 1$ , y por lo tanto se cumplirá  $\mu = \mu(Y)$  en general.

### 2.2. Formulación Generalizada.

El problema a resolver es el sistema de ecuaciones (1.29)-(1.30)-(1.31)-(1.32)-(1.33) sin término gravitacional dada su escasa influencia en el campo fluidodinámico como ya se ha comentado anteriormente, por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v r) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.2)$$

$$\rho u \frac{\partial Y}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{1}{S} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho \frac{\partial Y}{\partial r} \right) \quad (2.3)$$

con la densidad y viscosidad dadas por:

$$\rho = \frac{1}{Y + \epsilon(1 - Y)} \quad (2.4)$$

$$\mu = 1 \quad (2.5)$$

El problema (2.1)-(2.2)-(2.3)-(2.4)-(2.5) ha de ser integrado con las condiciones de contorno:

$$x = 0 : \begin{cases} 0 < r < 1 : & u = 1, Y = 1, \\ r > 1 : & u = 0, Y = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$x > 0 : \begin{cases} r = 0 : & \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial Y}{\partial r} = v = 0, \\ r \rightarrow \infty : & u \rightarrow 0, Y \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

Por otro lado, en esta zona el espesor de la capa de mezcla  $\delta$  es muy pequeño comparado con el radio del orificio  $a$ , las variaciones radiales pueden considerarse como variaciones en coordenadas localmente cartesianas dado el gran radio de curvatura  $R$  que presenta la capa anular de mezcla comparado con  $\delta$ . Basta con realizar el cambio de variable  $r = R - r^*$  con  $R \sim a$  y  $r^* \sim \delta$  el operador Laplaciano radial  $\Delta_r = 1/r \partial / \partial r [r \partial / \partial r]$  se convierte en  $\Delta_{r^*} = \partial^2 / \partial r^{*2}$  pues  $R \gg r^*$  en todo el rango de variación de  $r$ .

El problema anteriormente formulado admite una solución de semejanza. En efecto, a distancias  $x \ll 1$  la coordenada dimensional radial varía en distancias del orden  $r \sim a \pm \delta/2$  siendo  $\delta \ll a$ , por lo que se puede considerar  $r \sim a$  en primera aproximación. En esta zona la velocidad característica es del mismo orden que la velocidad de inyección  $u \sim 1$  y la densidad es del mismo orden que la densidad de la sustancia ligera  $\rho \sim 1$ . Por otro lado, el término de convección longitudinal de cantidad de movimiento ha de ser del mismo orden que el término de difusión transversal:  $\rho u^2/x \sim u/r^2$ . De lo anterior se deriva que  $r \sim x^{1/2}$  y por tanto la variable de semejanza más adecuada para la descripción de este problema es  $\eta = (r - 1)/x^{1/2}$ . Se cumple pues que  $u = u(\eta)$  y  $\rho = \rho(\eta)$ . El valor característico de la función de corriente será por tanto  $\psi_o \sim x^{1/2}$ . Por tanto la función de corriente se puede descomponer en la multiplicación de una autofunción  $F(\eta)$  y otra de  $x$ , esto es:  $\psi = x^{1/2} F(\eta)$ . De la definición de la función de corriente con  $r \sim 1$ :

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.8)$$

las variables fluidodinámicas se pueden poner en función de la variable de semejanza  $\eta$ :

$$u = \frac{F'}{\rho}; \quad v = \frac{\eta}{2\rho x^{1/2}} \left[ F' - \frac{F}{\eta} \right]; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x} \left( \frac{F'}{\rho} \right)'; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{x^{1/2}} \left( \frac{F'}{\rho} \right)';$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{x} \left( \frac{F'}{\rho} \right)'' \quad (2.9)$$

y sustituyendo estas relaciones en (2.2) y (2.3):

$$\left( \frac{\mathbf{F}'}{\rho} \right)'' + \frac{\mathbf{F}}{2} \left( \frac{\mathbf{F}'}{\rho} \right)' = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

$$(\rho \mathbf{Y}')' + \frac{S \mathbf{F}}{2} \mathbf{Y}' = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

con  $\rho = 1/(Y + \epsilon(1 - Y))$ , y  $S = \nu_j/D$  el número de Schmidt basado en la viscosidad cinemática de la sustancia ligera. Las condiciones de contorno son:

$$\begin{cases} \eta \rightarrow +\infty : & \mathbf{F}'/\rho \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{0} \\ \eta \rightarrow -\infty : & \mathbf{F}'/\rho \rightarrow \mathbf{1}, \quad \mathbf{F} \rightarrow \eta, \quad \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{1} \end{cases} \quad (2.12)$$

El problema (2.10)-(2.11)-(2.12) constituye un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer y segundo orden, no lineales y acopladas, que ha de ser resuelto numéricamente mediante técnicas de Multidisparo No Lineal.

En particular, el problema expuesto se reduce para  $\epsilon = 1$  al problema de Blasius<sup>1</sup> para una capa de mezcla de un chorro laminar axilsimétrico de la misma composición que el ambiente, a  $x \ll 1$ . Este resultado permitirá la validación del código numérico construido comparando con el conocido perfil de Blasius.

<sup>1</sup>Ver apéndice B, ecuaciones (B.3) y (B.4) y figuras B.1-B.2.

## 2.3. Solución Numérica para $\epsilon \ll 1$ y $\epsilon > 0$ .

### 2.3.1. Método de Multi-Disparo No Lineal.

En este apartado se propone un método de resolución del problema (2.10)-(2.11)-(2.12) para rangos de  $\epsilon \ll 1$  de forma que  $\epsilon > 0$ , esto es, sin llegar al límite de chorro infinitamente ligero  $\epsilon \equiv 0$  para el cual más tarde se verá que existe solución si se plantea apropiadamente la técnica numérica.

En primer lugar ha de expresarse el sistema (2.10)-(2.11) como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, lo cual puede hacerse sin dificultad si se realizan los siguientes cambios de variables en función del nuevo vector de variables  $\vec{\varphi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^5$ :

$$\varphi_1 = F; \quad \varphi_2 = \frac{F'}{\rho}; \quad \varphi_3 = \left(\frac{F'}{\rho}\right)'; \quad \varphi_4 = Y; \quad \varphi_5 = \rho Y'; \quad (2.13)$$

de donde se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\varphi_1' = \rho\varphi_2; \quad \varphi_2' = \varphi_3; \quad \varphi_3' = -\frac{\varphi_1\varphi_3}{2}; \quad \varphi_4' = \frac{\varphi_5}{\rho}; \quad \varphi_5' = -S\frac{\varphi_1\varphi_5}{2\rho}; \quad (2.14)$$

que puede expresarse de la forma  $\vec{\varphi}' = \vec{\Theta}$  como un sistema vectorial de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

El método de Multi-Disparo propone calcular iterativamente el valor de  $\varphi_i$  en  $\eta = 0$ , correspondiente a  $\varphi_i(0) = \lambda_i$ , de forma que se cumplan las condiciones de contorno dadas por (2.12) en términos de las nuevas variables:

$$\begin{cases} \varphi_1(\vec{\lambda}, -\infty) = \eta \\ \varphi_2(\vec{\lambda}, -\infty) = 1 \\ \varphi_4(\vec{\lambda}, -\infty) = 1 \\ \varphi_2(\vec{\lambda}, +\infty) = 0 \\ \varphi_4(\vec{\lambda}, +\infty) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

o en forma vectorial:  $\vec{\varphi}_o = [\varphi_1(-\infty), \varphi_2(-\infty), \varphi_4(-\infty), \varphi_2(+\infty), \varphi_4(+\infty)]^T = \vec{B}$ . Se denota  $\vec{\lambda} = \{\lambda_i\}_{i=1}^5$  como el vector de parámetros de disparo. Para cada iteración en  $\lambda$  ha de resolverse el sistema de ecuaciones diferenciales para el cual se propone un método de Runge-Kutta de 4º Orden, que opera explícitamente partiendo desde  $\eta = 0$  hasta  $\eta \pm \infty$ , y resolviendo simultáneamente (2.14) componente a componente:

$$\vec{\varphi}_{j+1} = \vec{\varphi}_j + \frac{1}{6}(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4) \quad (2.16)$$

siendo  $\vec{K}_1 = h_\eta\Theta(\rho_j, \varphi_j)$ ,  $\vec{K}_2 = h_\eta\Theta(\rho_j, \varphi_j + \vec{K}_1/2)$ ,  $\vec{K}_3 = h_\eta\Theta(\rho_j, \varphi_j + \vec{K}_2/2)$ , y  $\vec{K}_4 = h_\eta\Theta(\rho_j, \varphi_j + \vec{K}_3)$ , donde  $h_\eta$  es el paso de integración,  $j = N_\eta(\eta = 0), \dots, N_\eta(\eta = +\infty)$  y  $j = N_\eta(\eta = -\infty), \dots, N_\eta(\eta = 0)$ , y  $N_\eta$  el número de nodo de la malla computacional correspondiente al valor de  $\eta$  indicado entre paréntesis.

El nuevo vector de disparo en la siguiente iteración  $n+1$ ,  $\vec{\lambda}^{n+1}$ , se elige de forma que el error acumulado de las nuevas condiciones de contorno respecto de (2.15) sea el mínimo posible, mediante un Método de Newton-Raphson Generalizado. Para ello basta con realizar un desarrollo de Taylor de primer orden de (2.15) alrededor de  $\vec{\lambda}^n$ , el cual puede expresarse introduciendo la convención sumatoria de Einstein<sup>2</sup> como:

$$\varphi_{oi}^n + \frac{\partial \varphi_{oi}^n}{\partial \lambda_j^n} \Delta \lambda_j^n = B_i \quad (2.17)$$

con  $\Delta \lambda_j^n = \lambda_j^{n+1} - \lambda_j^n$ , y  $\partial \varphi_{oi}^n / \partial \lambda_j$  corresponde a un tensor de  $5 \times 5$ , por lo que la anterior ecuación puede reescribirse en forma matricial como:

$$\left[ \frac{\partial \vec{\varphi}_o^n}{\partial \vec{\lambda}^n} \right] \cdot \Delta \vec{\lambda}^n = \vec{B} - \vec{\varphi}_o^n \quad (2.18)$$

siendo:

<sup>2</sup>Einstein summation convention. Véase [12].

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{\varphi}_o^n}{\partial \vec{\lambda}^n} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1} - \infty & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_2} - \infty & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_5} - \infty \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_1} - \infty & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_2} - \infty & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_5} - \infty \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_1} - \infty & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_2} - \infty & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_5} - \infty \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1} + \infty & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_2} + \infty & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_5} + \infty \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_1} + \infty & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_2} + \infty & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_5} + \infty \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_1} + \infty & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_2} + \infty & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_5} + \infty \end{pmatrix}$$

El método de Newton-Raphson Generalizado queda por tanto en la forma:

$$\vec{\lambda}^{n+1} = \vec{\lambda}^n + (\vec{B} - \vec{\varphi}_o^n) \cdot \left[ \frac{\partial \vec{\varphi}_o^n}{\partial \vec{\lambda}^n} \right]^{-1} \quad (2.19)$$

sin más que resolver la ecuación matricial (2.18).

### 2.3.2. Solución Numérica Particularizada para Mezclas He-Aire.

La particularización de (2.10)-(2.11)-(2.12) para una mezcla dada se realiza mediante los parámetros  $\epsilon$  y  $S$ , que para una mezcla He-Aire son  $\epsilon = 0,138$  y  $S = 1,69$  a una presión  $P = 1atm$  y temperatura  $T = 300K$ .

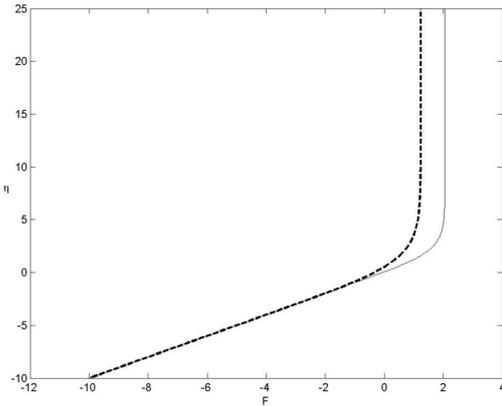


Figura 2.1: Perfil autosemejante  $F = F(\eta)$  para el caso de una mezcla He-Aire (línea continua) y perfil autosemejante de Blasius  $F = F(\eta)$  para el caso  $\epsilon = 1$  (línea discontinua gruesa), en la capa de mezclado inicial para  $x \ll 1$ . Para el caso He-Aire, se cumple que  $F_\infty = 2,055$ , mientras que para el caso  $\epsilon = 1$  se tiene que  $F_\infty = 1,236$ .

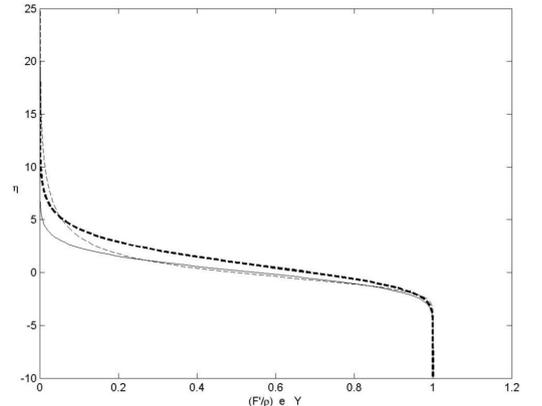


Figura 2.2: Perfiles autosemejantes  $u = F'/\rho(\eta)$  (línea continua) e  $Y = Y(\eta)$  (línea discontinua fina) para el caso de una mezcla He-Aire, y perfil autosemejante de Blasius  $u = F'(\eta)$  (línea discontinua gruesa), en la capa de mezclado inicial para  $x \ll 1$ .

En las figuras 2.1 y 2.2 pueden observarse los resultados para una mezcla He-Aire, comparados con los resultados obtenidos de la solución de Blasius<sup>3</sup> que podría representar físicamente una mezcla Aire-Aire o cualquier otro par de la misma sustancia. Se observa un mayor carácter convectivo de la velocidad para el caso He-Aire, debido a que la densidad  $\rho \sim 1/\epsilon \gg 1$  dentro de la capa de mezcla, y por lo tanto los términos inerciales convectivos de (2.2) priman sobre los de difusión. Por otro lado, se observa un carácter más difusivo del perfil de fracción másica  $Y$ , debido a la presencia de la densidad  $\rho$  en el término difusivo de la ecuación de Conservación de Especies (2.3). Como ya se mencionará mas tarde, en la capa de mezcla  $\rho \sim 1/\epsilon$ , lo que se traduce físicamente en el mezclado con la sustancia ambiente que resulta ser comparativamente mucho más densa que la sustancia ligera a medida que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Esta característica realimenta el proceso de difusión de la sustancia ligera en la sustancia pesada, provocando que el perfil de fracción másica  $Y$  presente un carácter mucho más difusivo que el de velocidad axial  $u$ .

<sup>3</sup>Ver apéndice B.

### 2.3.3. Solución Numérica Particularizada para Mezclas $H_2$ -Aire.

Para una mezcla  $H_2$ -Aire se tiene que  $\epsilon = 0,069$  y  $S = 1,39$  a una presión  $P = 1atm$  y temperatura  $T = 300K$ .

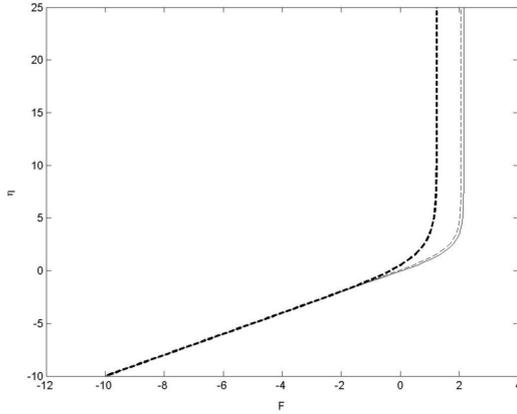


Figura 2.3: Perfil autosemejante  $F = F(\eta)$  para el caso de una mezcla  $H_2$ -Aire (línea continua), perfil autosemejante de Blasius  $F = F(\eta)$  para el caso  $\epsilon = 1$  (línea discontinua gruesa), y perfil autosemejante  $F = F(\eta)$  para una mezcla He-Aire (línea discontinua fina), en la capa de mezclado inicial para  $x \ll 1$ . Para el caso  $H_2$ -Aire, se cumple que  $F_\infty = 2,147$ , para el caso He-Aire se tiene que  $F_\infty = 2,055$ , mientras que para el caso  $\epsilon = 1$  se tiene que  $F_\infty = 1,236$ .

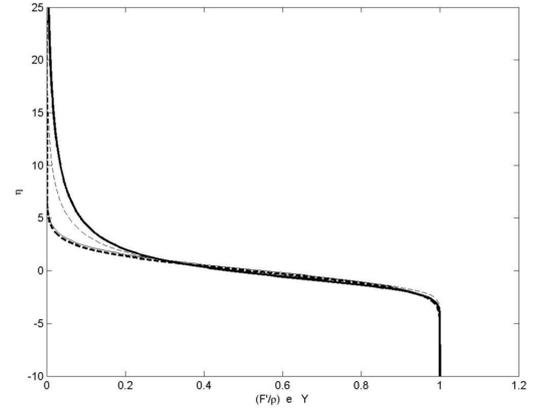


Figura 2.4: Perfiles autosemejantes  $u = F'/\rho(\eta)$  para una mezcla  $H_2$ -Aire (línea discontinua gruesa) e  $Y = Y(\eta)$  (línea continua gruesa), así como perfiles  $u = F'/\rho(\eta)$  para el caso de una mezcla He-Aire (línea continua fina) e  $Y = Y(\eta)$  (línea discontinua fina), en la capa de mezclado inicial para  $x \ll 1$ .

La figura 2.3 indica que debe de existir un valor asintótico de  $F_\infty$  para  $\epsilon \rightarrow 0$ , el cual se calculará más tarde. La mezcla  $H_2$ -Aire presenta una mayor difusión molecular que la mezcla He-Aire, tal y como puede observarse en la figura 2.4, si bien los perfiles de velocidad son bastante parecidos. En particular, este comportamiento más difusivo se debe a dos motivos: por ser el  $H_2$  es un gas más ligero que el He y por tanto presentar un mayor carácter difusivo, y por ser los números de Schmidt tales que  $S_{H_2} < S_{He}$ . En el apartado siguiente se demuestra la repercusión del número de Schmidt en la solución, de forma que conforme  $S$  se hace más grande el carácter difusivo de (2.3) es menor, en parte porque  $S \sim 1/D$ .

### 2.3.4. Dependencia de la Solución con el Número de Schmidt.

De las expresiones (1.15) y (1.16) se obtiene que la viscosidad de una mezcla gaseosa evoluciona con la temperatura de la forma  $\mu \sim T^{1/2}/\Omega^{(2,2)}(T)$  y se comporta de manera aproximadamente independiente con la presión. Como  $\rho \sim P/T$ , entonces la viscosidad cinemática  $\nu \sim T^{3/2}/P\Omega^{(2,2)}(T)$ . Por otro lado, el coeficiente de difusión es función de la presión y de la temperatura, de la forma  $D \sim T^{3/2}/P\Omega^{(1,1)}(T)$ . De lo anterior se deriva que el número de Schmidt  $S = \nu/D \sim \Omega^{(1,1)}(T)/\Omega^{(2,2)}(T)$  es aproximadamente independiente del estado termodinámico de la sustancia, a excepción tan sólo de la repercusión de la temperatura en los parámetros de interacción atómica  $\Omega^{(i,j)}$  del potencial de Lennard-Jones. Por tanto, la relación de números de Schmidt para dos temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  es  $S(T_2) = S(T_1)[\Omega^{(1,1)}(T_2)\Omega^{(2,2)}(T_1)]/[\Omega^{(2,2)}(T_2)\Omega^{(1,1)}(T_1)]$ . Para una mezcla de  $H_2$ -Aire a  $T_1 = 300K$ , se tiene  $\Omega^{(1,1)}(T_1) = 0,8340$  y  $\Omega^{(2,2)}(T_1) = 0,8379$ . Eligiendo por ejemplo  $T_2 = 843K$ , temperatura del Primer Límite de Explosión de una mezcla estequiométrica  $H_2 - O_2$  a presión atmosférica, se tiene  $\Omega^{(1,1)}(T_2) = 0,7046$  y  $\Omega^{(2,2)}(T_2) = 0,7205$ . De lo anterior se obtiene  $S(873K) = 0,982 \cdot S(300K) = 1,36$ , por lo que la dependencia del número de Schmidt con la temperatura es muy ligera.

Aún a pesar de que como se ha demostrado un eventual incremento de la temperatura del chorro  $T_j$  no ocasiona una gran variación en el número de Schmidt, se calculan las soluciones para una mezcla  $H_2$ -Aire en condiciones normales ( $S = 1,39$ ) y en unas condiciones ficticias tales que  $S = S_{He} = 1,69$ :

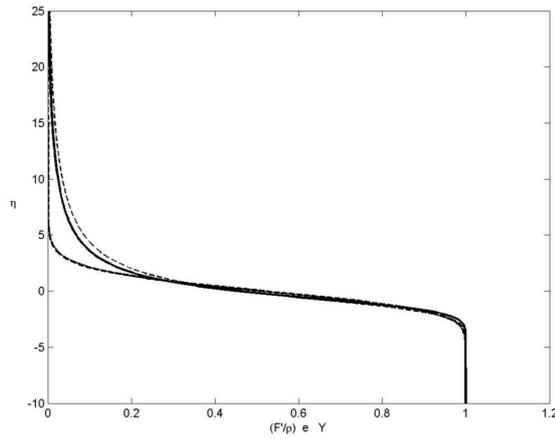


Figura 2.5: Perfiles autosemejantes  $u = F'/\rho(\eta)$  para una mezcla  $H_2$ -Aire con  $S = 1,39$  (línea continua fina) e  $Y = Y(\eta)$  (línea discontinua fina), así como perfiles  $u = F'/\rho(\eta)$  para el caso de una mezcla  $H_2$ -Aire con  $S = 1,69$  (línea discontinua gruesa) e  $Y = Y(\eta)$  (línea continua gruesa), en la capa de mezclado inicial para  $x \ll 1$ .

En la figura 2.5 puede observarse como un aumento del número de Schmidt manteniendo constante  $\epsilon = 0,069$  revierte en una disminución del mecanismo de difusión molecular, debido a que el número de Schmidt es inversamente proporcional al coeficiente binario de difusión  $D$ .

## 2.4. Solución Numérica para $\epsilon \equiv 0$ .

La figura 2.6 indica que debe de existir un valor asintótico de  $F_\infty$  según  $\epsilon \rightarrow 0$  lo cual puede observarse al calcular iterativamente (2.10)-(2.11)-(2.12) con  $0 < \epsilon < 1$ , con  $S = 1$  y  $S = 1,69$ , en la siguiente figura:

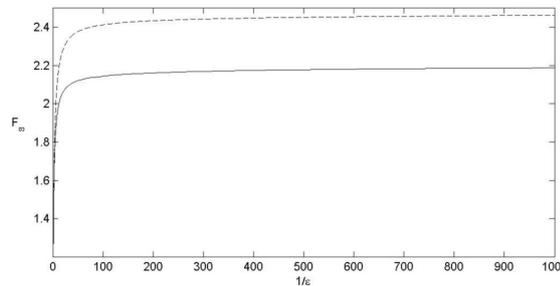


Figura 2.6: Perfiles autosemejantes  $F = F(\eta)$  en función de  $1/\epsilon$  para una mezcla binaria variable con  $0,001 < \epsilon < 1$ ,  $S = 1$  (línea continua) y  $S = 1,69$  (línea discontinua). Para  $\epsilon = 1$  se tiene que  $F_\infty(S = 1) \sim F_\infty(S = 1,69) = 1,236$ , mientras que para  $\epsilon = 0,001$  se tiene que  $F_\infty(S = 1) = 2,160$  y  $F_\infty(S = 1,69) = 2,461$ .

Como puede observarse en la figura 2.6, existe una dependencia clara respecto del número de Schmidt. El problema de Blasius ( $\epsilon = 1$ ) parece verse poco afectado por un cambio de  $S$ , si bien conforme  $\epsilon \rightarrow 0$  el impacto de  $S$  sobre la solución se hace mayor, lo que ya se demostró en el apartado anterior.

En particular, la resolución de (2.10)-(2.11)-(2.12) con  $\epsilon \equiv 0$  tiene graves consecuencias en el planteamiento del método numérico, dado que en  $\eta \rightarrow +\infty$  se tiene  $Y \rightarrow 0$  y por tanto  $\rho \rightarrow \infty$ , produciendo una singularidad en ambas ecuaciones diferenciales. Conforme  $\epsilon \rightarrow 0$ , el radio característico de difusión de la fracción másica  $Y$  crece indefinidamente, por lo que a medida que  $\epsilon \rightarrow 0$  se necesitaría un dominio computacional cada vez más amplio para no ocasionar ningún impacto sobre la solución al imponer  $Y \rightarrow 0$  en  $\eta \rightarrow +\infty$ . Por esta razón conviene dilucidar primero el comportamiento de  $F(\eta)$  e  $Y(\eta)$  para  $\eta \gg 1$ , con  $Y \ll 1$ . Dado que para  $\eta \gg 1$  lo suficientemente grande, según las figuras 2.3 y 2.4,  $F \sim F_\infty$  mientras que el perfil de  $Y$  de fracción másica sigue sufriendo variaciones, que vendrán dadas linealizando (2.11) alrededor de  $F = F_\infty$ :

$$\left(\frac{Y'}{Y}\right)' + \frac{SF_\infty}{2}Y' = 0 \quad (2.20)$$

con  $Y \rightarrow 0$  para  $\eta \rightarrow +\infty$ . Esta ecuación puede integrarse dos veces para dar:

$$Y = \frac{1}{\frac{SF_\infty}{2}(\eta + \eta_\infty)} \quad (2.21)$$

que representa el comportamiento asintótico de primer orden de  $Y$  para un chorro infinitamente ligero ( $\epsilon \equiv 0$ ) y para  $\eta \gg 1$ , en función de ciertas constantes  $\eta_\infty$  y  $F_\infty$  a determinar.

A este mismo resultado se podría haber llegado sin más que analizar el comportamiento asintótico de  $Y$  para  $\epsilon \ll 1$  pero  $\epsilon > 0$ . En efecto, en el rango  $\epsilon \sim Y \ll 1$ , entonces  $\rho \sim 1/(Y + \epsilon)$ , y por tanto el problema linealizado en primer orden a integrar es  $(Y'/(Y + \epsilon))' + SF_\infty Y'/2 = 0$ , que puede ser integrado dos veces para dar  $Y/(Y + \epsilon) = e^{-SF_\infty \epsilon \eta/2}$ . Desarrollando en serie de Taylor a ambos lados de la anterior expresión alrededor de  $\epsilon \rightarrow 0$ , se tiene que  $Y/(Y + \epsilon) \sim 1 - Y/\epsilon + O(\epsilon^2)$  mientras que por otra parte  $e^{-SF_\infty \epsilon \eta/2} \sim 1 - SF_\infty \epsilon \eta/2 + O(\epsilon^2)$ , de donde se obtiene que  $Y \sim 2/(SF_\infty \eta)$  que representa la ecuación (2.21) para  $\eta_\infty \ll \eta$ . Este último resultado indica que la constante  $\eta_\infty$  será mucho menor que el valor de  $\eta$  máximo (punto de disparo) del dominio computacional.

El comportamiento asintótico de  $F(\eta)$  puede suponerse como  $F = F_\infty + f$  para  $\eta \gg 1$ , donde  $f$  verifica la ecuación diferencial (2.10) linealizada en primer orden alrededor de  $F = F_\infty$ :

$$(f'Y)'' + \frac{F_\infty}{2}(f'Y)' = 0 \quad (2.22)$$

con  $f'Y \rightarrow 0$  en  $\eta \rightarrow \infty$ . Esta ecuación puede ser integrada dos veces y haciendo uso de (2.21) se obtiene una ecuación diferencial de primer orden  $f' = 0,5SF_\infty(\eta + \eta_\infty)Ae^{-F_\infty \eta/2}$ , que al integrarla por partes<sup>4</sup> resulta:

$$f = Ae^{-\frac{F_\infty \eta}{2}} \left( \eta + \eta_\infty + \frac{2}{F_\infty} \right) \quad (2.23)$$

donde  $A$ ,  $\eta_\infty$  y  $F_\infty$  son constantes a determinar por el comportamiento de la solución a  $\eta \sim O(1)$ .

Dado que se conoce ya el comportamiento asintótico de las soluciones en  $\eta \rightarrow +\infty$ , se puede plantear una estrategia numérica para resolver el problema (2.10)-(2.11)-(2.12), que consiste en disparar la solución desde  $\eta \rightarrow +\infty$  evitando así la singularidad en  $\rho$ :

$$(F'Y)'' + \frac{F}{2}(F'Y)' = 0 \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{Y'}{Y}\right)' + \frac{SF}{2}Y' = 0 \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} \eta \rightarrow +\infty : & F = F_\infty + Ae^{-\frac{F_\infty \eta}{2}} \left( \eta + \eta_\infty + \frac{2}{F_\infty} \right), & Y = \frac{1}{\frac{SF_\infty}{2}(\eta + \eta_\infty)} \\ \eta \rightarrow -\infty : & F'Y \rightarrow 1, & F \rightarrow \eta, & Y \rightarrow 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

con  $F_\infty$ ,  $A$  y  $\eta_\infty$  los parámetros de disparo.

### 2.4.1. Método de Multi-Disparo No Lineal para $\epsilon \equiv 0$ .

El método numérico de resolución es análogo al expuesto en el apartado 2.3.1., sino que ahora las condiciones de contorno para las nuevas variables, dadas por (2.13), son:

$$\begin{cases} \varphi_1(\vec{\lambda}, -\infty) = \eta \\ \varphi_2(\vec{\lambda}, -\infty) = 1 \\ \varphi_4(\vec{\lambda}, -\infty) = 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

o expresadas vectorialmente como  $\vec{\varphi}_o = [\varphi_1(-\infty), \varphi_2(-\infty), \varphi_4(-\infty)]^T = \vec{B}$ , siendo  $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$  el vector

<sup>4</sup>La integral  $\int (\eta + \eta_\infty)e^{-F_\infty \eta/2} d\eta$  es del tipo  $\int \alpha d\beta$ , por lo que basta hacer el cambio  $\alpha = \eta + \eta_\infty$  junto con  $d\beta = e^{-F_\infty \eta/2}$  para convertirla en  $\alpha\beta - \int \beta d\alpha$  y resolverla trivialmente.

de parámetros de disparo con  $\lambda_1 = F_\infty$ ,  $\lambda_2 = A$  y  $\lambda_3 = \eta_\infty$ . Realizando un desarrollo de Taylor de (2.27) alrededor del vector de parámetros de disparo en la iteración  $n$ ,  $\vec{\lambda}^n$ , se tiene:

$$\varphi_{oi}^n + \frac{\partial \varphi_{oi}^n}{\partial \lambda_j^n} \Delta \lambda_j^n = B_i \quad (2.28)$$

con  $\Delta \lambda_j^n = \lambda_j^{n+1} - \lambda_j^n$ , y  $\partial \varphi_{oi}^n / \partial \lambda_j^n$  corresponde a un tensor de  $3 \times 3$ , por lo que la anterior ecuación puede reescribirse en forma matricial como:

$$\left[ \frac{\partial \vec{\varphi}_o^n}{\partial \vec{\lambda}^n} \right] \cdot \Delta \vec{\lambda}^n = \bar{B} - \vec{\varphi}_o^n \quad (2.29)$$

donde

$$\left[ \frac{\partial \vec{\varphi}_o^n}{\partial \vec{\lambda}^n} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_1} - \infty & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_2} - \infty & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_3} - \infty \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_1} - \infty & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_2} - \infty & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_3} - \infty \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_1} - \infty & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_2} - \infty & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_3} - \infty \end{pmatrix}$$

con lo que el Método de Newton-Raphson Generalizado para este problema es:

$$\vec{\lambda}^{n+1} = \vec{\lambda}^n + (\bar{B} - \vec{\varphi}_o^n) \cdot \left[ \frac{\partial \vec{\varphi}_o^n}{\partial \vec{\lambda}^n} \right]^{-1} \quad (2.30)$$

#### 2.4.2. Solución Numérica Particularizada para Mezclas Infinitamente Ligeras de $H_2$ -Aire.

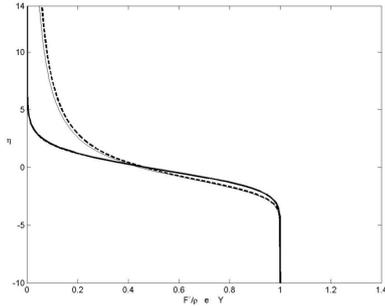


Figura 2.7: Perfil autosemejante  $u = F'/\rho$  para un chorro infinitamente ligero  $\epsilon \equiv 0$ , con  $S = 1$  (línea continua gruesa) y  $S = S_{H2} = 1,39$  (línea discontinua fina), así como perfiles  $Y = Y(\eta)$  para  $S = 1$  (línea discontinua gruesa) y  $S = S_{H2} = 1,39$  (línea continua fina), en la capa de mezclado inicial para  $x \ll 1$ .

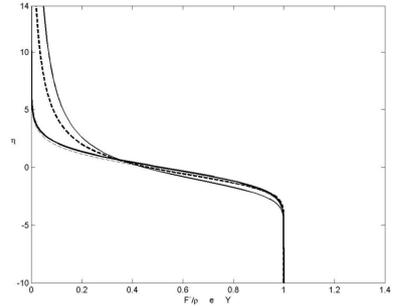


Figura 2.8: Perfiles autosemejantes  $u = F'/\rho(\eta)$  para una chorro infinitamente ligero  $\epsilon \equiv 0$  y  $S = S_{H2} = 1,39$  (línea discontinua fina), y para una mezcla  $H_2$ -Aire con  $\epsilon = 0,069$  y  $S = S_{H2} = 1,39$  (línea continua gruesa). Además se muestran los perfiles  $Y = Y(\eta)$  para un chorro infinitamente ligero  $\epsilon \equiv 0$  y  $S = S_{H2} = 1,39$  (línea continua fina), y para una mezcla  $H_2$ -Aire con  $\epsilon = 0,069$  y  $S = S_{H2} = 1,39$  (línea discontinua gruesa), en la capa de mezclado inicial para  $x \ll 1$ .

En la figura 2.7 se muestran los perfiles autosemejantes  $u = F'/\rho(\eta)$  e  $Y = Y(\eta)$  para chorros infinitamente ligeros, con números de Schmidt  $S = 1$  y  $S = S_{H2} = 1,39$ . Si bien se observa que el perfil de velocidades no sufre grandes variaciones, el perfil de fracción másica se difunde menos conforme el número de Schmidt aumenta, debido a que como ya se comentó anteriormente,  $S$  actúa como la inversa del coeficiente de difusión en (2.3). Por otro lado, en la figura 2.8 se muestran los perfiles autosemejantes  $u = F'/\rho(\eta)$  e  $Y = Y(\eta)$  para la mezcla  $H_2$ -Aire analizada ya anteriormente con  $\epsilon = 0,069$  y  $S = 1,39$ , conjuntamente con una mezcla ficticia  $H_2$ -Aire infinitamente ligera  $\epsilon \equiv 0$  pero conservando el número de Schmidt  $S = 1,39$ . Se observa que según  $\epsilon \rightarrow 0$  el mecanismo de difusión molecular cobra más importancia, pues  $\rho \sim 1/Y$  en (2.3). Los valores obtenidos de  $F_\infty$ ,  $A$  y  $\eta_\infty$ , dependen en general del número de Schmidt  $S$ :

	$S = 1$	$S = S_{H2} = 1,39$
$F_\infty$	2.163	2.206
$A$	-0.065	-0.370
$\eta_\infty$	1.738	-0.598

## Capítulo 3

# Solución de Semejanza en el Campo Lejano.

### 3.1. Consideraciones Previas.

En este apartado se obtendrá una solución de analítica de semejanza el caso en el que la fuerza de flotación es despreciable ( $G \sim 0$ ) comparado con las variaciones de cantidad de movimiento debido a los mecanismos de convección y difusión viscosa. Como ya se comentó anteriormente, este caso corresponde a una realidad física en la que el número de Froude  $F$  es extraordinariamente grande, lo cual puede ser interpretable como una enorme energía cinética en la entrada comparada con el incremento de energía cinética debido a la fuerza de flotación a lo largo de la longitud de entrada hidrodinámica. Además se toma el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  para chorros infinitamente ligeros, eliminando este parámetro de la formulación. Como se verá posteriormente, éste límite tiene un impacto sobre el mecanismo de difusión molecular de la especie ligera, al cual hace predominar sobre el mecanismo de mezclado convectivo. Como se puede ver en (1.40), tomando  $G = 0$  el flujo de cantidad de movimiento se mantiene invariante con  $x$ , por lo que  $J = \int_0^\infty \rho u^2 r dr = 1/2$  constituye una condición integral conservativa junto con la conservación de gasto másico de sustancia ligera (1.43).

### 3.2. Comportamiento del Mecanismo de Difusión Molecular en el Campo Lejano.

Sean las ecuaciones de Continuidad, Cantidad de Movimiento y Conservación de la Especie ligera particularizadas para  $\epsilon \rightarrow 0$  y  $G=0$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v r) = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3.2)$$

$$\rho u \frac{\partial Y}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{1}{S} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho \frac{\partial Y}{\partial r} \right) \quad (3.3)$$

junto con las condiciones integrales de conservación:

$$2 \int_0^\infty \rho u^2 r dr = 1 \quad (3.4)$$

$$2 \int_0^\infty \rho Y u r dr = 1 \quad (3.5)$$

siendo  $\rho = 1/Y$ , y  $\mu = 1$  en virtud de (1.27). Sean  $r_u$  y  $r_y$  los radios característicos o espesores de capa de mezcla característicos para la velocidad  $u$  y la fracción másica  $Y$ . Estas dos dimensiones representan la distancia radial, que en general será una función de  $x$ , a la cual el perfil del escalar transportado correspondiente ha decaído considerablemente por efecto del mecanismo de difusión. Para  $x \gg 1$  el efecto del mecanismo de difusión transversal ha de haberse equilibrado con el mecanismo de convección longitudinal, para ambos escalares  $u$  e  $Y$  transportados, por lo que  $\rho u^2/x \sim u/r_u^2$  y  $\rho Y u \sim \rho Y/r_y^2$ . Además,  $\rho u^2 r_u^2 \sim 1$  por conservación de Cantidad de

Movimiento, y  $\rho Y u r_u^2 \sim 1$  por conservación de flujo másico de especie ligera.

De todo lo anterior se deriva que el radio característico  $r_y$  del escalar  $Y$  evoluciona linealmente con la coordenada axial:  $r_y \sim x$ . Por otro lado el radio característico  $r_u$  del escalar  $u$  evoluciona con la raíz cuadrada de la coordenada axial:  $r_u \sim x^{1/2}$ . Dado que  $r_y \gg r_u$  para  $x \gg 1$ , Es de esperar pues que el perfil de fracción másica  $Y$  presente un carácter extraordinariamente más difusivo que el perfil de velocidades. Existirá pues un rango de longitudes radiales  $0 < r < r_u(x)$  en el cual las variaciones transversales de velocidad sean apreciables mientras que la fracción másica de especie ligera tomará un valor casi constante en todo el rango. No obstante, la anterior aproximación de órdenes de magnitudes indica que  $u \sim 1/x$  e  $Y \sim 1/x$ . De lo anterior se puede deducir que  $Y = Y_o/x$  será aproximadamente una función de la coordenada  $x$  modulada por cierta constante  $Y_o$  a determinar.

En realidad la importancia del mecanismo de difusión molecular en este flujo viene posibilitada por la presencia de la densidad  $\rho = 1/Y$  dentro del término de la derecha de (3.3). A medida que la sustancia ligera es inyectada se produce un mezclado convectivo y difusivo. Conforme se avanza en la coordenada  $x$  la fracción másica  $Y$  decae debido al efecto de difusión intermolecular entre ambos componentes, pero el proceso se retroalimenta debido a la propia escasez de sustancia ligera, dado que la poca que queda tiene una capacidad extraordinaria de difundirse en el ambiente. Este comportamiento ya fue avanzado anteriormente de la comparación de los coeficientes efectivos de difusión de cantidad de movimiento y de difusión molecular, la cual resulta ser del orden de  $S/\rho = SY$ . En el campo lejano  $Y \sim \epsilon$ , por lo que  $SY \ll 1$  y es de esperar que comparativamente el efecto de difusión molecular sea mucho más importante comparado con el efecto de difusión de cantidad de movimiento.

Por tanto, puede escribirse  $1/r[\partial/\partial r(\rho r \partial Y/\partial r)] \sim 0$  para cierta coordenada  $x$ , cuya solución general es  $Y = Y_o \Upsilon(x)$  si se integra con las condiciones  $Y \rightarrow Y_o$  para  $0 < r < r_u$ . Anteriormente se ha encontrado que  $\Upsilon(x) = 1/x$ , por lo que:

$$Y = \frac{1}{\rho} = \frac{Y_o}{x} \quad (3.6)$$

La anterior aproximación es valida para  $x$  moderadamente grandes, pues en general  $\rho = 1/[Y + \epsilon(1 - Y)] = x/[Y_o + \epsilon(x - Y_o)] \rightarrow x/Y_o$  para  $x \ll 1/\epsilon$ . De ahora en adelante se buscará una solución para el rango en el que la aproximación (3.6) es válida, esto es, a distancias radiales máximas del mismo orden que el radio característico de velocidad  $r_u$  y para  $x \ll 1/\epsilon$ .

### 3.3. Formulación Generalizada.

De los órdenes de magnitud estimados previamente se deriva que la variable de semejanza más adecuada para la descripción de este problema es  $\eta = r/x^{1/2}$ . El valor característico de la función de corriente puede estimarse como  $\psi_o \sim \rho u r^2 \sim x$ , por lo que dada la autofunción semejante de corriente  $F$ , la función de corriente puede escribirse como una descomposición de dos funciones de la variable  $x$  y la variable  $\eta$ , esto es,  $\psi = xF(\eta)$ . Teniendo en cuenta la definición de función de corriente:

$$\rho u r = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \rho v r = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.7)$$

las variables fluidodinámicas se pueden poner en función de la variable de semejanza  $\eta$ :

$$u = \frac{U(\eta)}{x} = \frac{Y_o}{x} \frac{F'}{\eta}; \quad v = \frac{V(\eta)}{x} = \frac{Y_o}{2x^{3/2}} \left[ F' - \frac{2F}{\eta} \right]; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{Y_o}{x^2} \frac{F'}{\eta} - \frac{\eta Y_o}{2x^2} \left( \frac{F'}{\eta} \right)'; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{Y_o}{x^{3/2}} \left( \frac{F'}{\eta} \right)';$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{Y_o}{x^2} \frac{1}{\eta} \left[ \eta \left( \frac{F'}{\eta} \right)' \right]'; \quad (3.8)$$

e introduciendo (3.8) en (3.2), se obtiene la ecuación diferencial:

$$-\frac{F'^2}{\eta} - F \left( \frac{F'}{\eta} \right)' = \left[ \eta \left( \frac{F'}{\eta} \right)' \right]' \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta la identidad diferencial:

$$-\frac{F'^2}{\eta} - F \left( \frac{F'}{\eta} \right)' = -\frac{1}{2} \left( \frac{F'^2}{\eta} \right)' \quad (3.10)$$

la ecuación (3.9) puede ser reescrita como:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{F}^{2'}}{\eta}\right)' = \left[\eta\left(\frac{\mathbf{F}'}{\eta}\right)'\right]' \quad (3.11)$$

junto con las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \eta = 0 : & \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{F}/\eta)' = \mathbf{0}, \\ \eta \rightarrow \infty : & (\mathbf{F}/\eta)'' \rightarrow \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3.12)$$

### 3.4. Solución Analítica para Chorros Infinitamente Ligeros $\epsilon \equiv 0$ .

Las expresiones (3.11)-(3.12) constituyen el problema diferencial a integrar. Ello puede hacerse sin más que integrar la ecuación (3.11) una vez imponiendo la condición de contorno  $(F/\eta)' = 0$  en  $\eta \rightarrow \infty$ :

$$\left(\frac{F'}{\eta}\right)' = -\frac{F^{2'}}{2\eta^2} \quad (3.13)$$

la cual se puede reescribir en la forma:

$$\frac{1}{2}F^{2'} = 2F' - (\eta F')' \quad (3.14)$$

Integrando otra vez e imponiendo  $F = 0$  en  $\eta = 0$ :

$$\frac{1}{2}F^2 = 2F - \eta F' \quad (3.15)$$

Esta última expresión constituye una ecuación diferencial autónoma de primer orden en  $F$ , que puede ser integrada mediante una expansión en fracciones para dar:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{F}{4-F}\right) = \ln\eta + A \quad (3.16)$$

donde  $A = \ln(c)$  es una constante aparentemente indeterminada. Es imposible imponer ninguna condición de contorno para hallar  $c$ , la cual debe de ser extraída mediante alguna de las Leyes Integrales de Conservación. Por tanto:

$$F = \frac{4c^2\eta^2}{1+c^2\eta^2} \quad (3.17)$$

Hacer notar que el perfil de la autofunción de corriente (3.17) es formalmente idéntico al obtenido para el campo lejano de un chorro laminar axilsimétrico, problema tratado ya anteriormente por Schlichting en [1] y resuelto analíticamente con éxito, como se puede observar en la expresión (A.20) del apéndice A. Más aún, el problema (3.11)-(3.12) es también idéntico al problema (A.14)-(A.15). Aun así, se verá que el perfil de la autofunción de corriente para el problema del chorro ligero es diferente del calculado por Schlichting para el caso de un chorro laminar en un ambiente aquiescente de la misma composición. Ello se debe a la aparición de la constantes  $c$  e  $Y_o$ , que deben ser resueltas mediante las leyes integrales. Sustituyendo (3.17) en (3.8) se obtiene:

$$u = \frac{1}{x} \frac{8c^2Y_o}{(1+c^2\eta^2)^2} \quad (3.18)$$

Utilizando<sup>1</sup> las Leyes Integrales (3.4) y (3.5):

$$2 \int_0^\infty \rho u^2 r dr = 2 \int_0^\infty \frac{64c^4Y_o^2}{(1+c^2\eta^2)^4} \eta d\eta = 128c^4Y_o^2 \left(\frac{1}{6c^2}\right) = 1 \quad (3.19)$$

$$2 \int_0^\infty \rho Y u r dr = 2 \int_0^\infty \frac{8c^2Y_o}{(1+c^2\eta^2)^2} \eta d\eta = 16c^2Y_o \left(\frac{1}{2c^2}\right) = 1 \quad (3.20)$$

de donde se obtiene  $\mathbf{Y}_o = \mathbf{1}/8$  y  $\mathbf{c}^2 = \mathbf{3}/8$ , siendo

$$\mathbf{F} = \frac{4\eta^2}{8/3 + \eta^2} \quad (3.21)$$

<sup>1</sup>Se demuestra mediante la utilización de la Regla Integral de Leibnitz que  $\int \frac{\eta^{n-1}d\eta}{(a+b\eta^n)^p} = \frac{-1}{n(p-1)b(a+b\eta^n)^{p-1}} + C$ .

En la figura 3.1 puede observarse la diferencia de (3.21) con la función de corriente obtenida por Schlichting en el problema de un chorro laminar sin diferencia de composición, dada por (A.21):

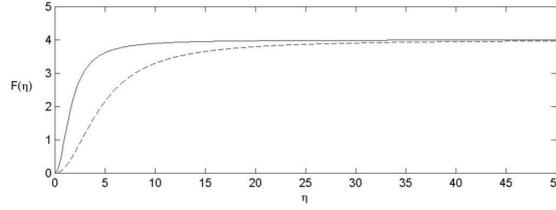


Figura 3.1: Función de corriente  $F$  en campo lejano para un chorro infinitamente ligero ( $\epsilon \equiv 0$ ) dada por  $F = 4\eta^2/(8/3 + \eta^2)$  (línea continua) y para un chorro de la misma composición que el ambiente ( $\epsilon = 1$ ) dada por  $F = 4\eta^2/(64/3 + \eta^2)$  (línea discontinua). Para  $\eta$  lo suficientemente grande, (3.21) deja de tener validez, por encontrarse  $r$  fuera del radio característico de velocidad e  $Y$  no ser constante dada una  $x \gg 1$ .

Igualmente, se puede calcular la velocidad axial  $u$  sin más que sustituir  $F$  en (3.8):

$$\mathbf{u} = \frac{1}{x} \frac{8/3}{(8/3 + \eta^2)^2} \quad (3.22)$$

En la figura 3.2 se muestra la comparación del perfil (3.22) de velocidad axial  $u$  obtenido para un chorro infinitamente ligero ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), y el obtenido por Schlichting para un chorro y ambiente de la misma composición ( $\epsilon = 1$ ), dado por (A.22), para  $15 < x < 20$ .

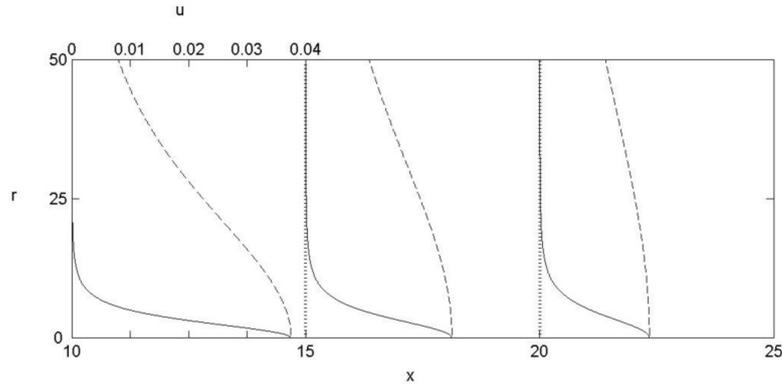


Figura 3.2: Perfil de velocidad axial  $u$  en campo lejano para un chorro infinitamente ligero ( $\epsilon \equiv 0$ ) dada por  $u = x^{-1}8/3/(8/3 + \eta^2)^2$  (línea continua) y para un chorro de la misma composición que el ambiente ( $\epsilon = 1$ ) dada por  $u = x^{-1}512/3/(64/3 + \eta'^2)^2$  (línea discontinua), para  $x = 10, 15, 20$ . En la parte superior izquierda se muestra la escala de velocidades.

La figura 3.2 indica las diferencias entre ambos perfiles. El perfil de Schlichting presenta una mayor difusión transversal de cantidad de movimiento, dado que el radio característico de velocidad en este caso se puede aproximar  $r'_u \sim x$ , y por lo tanto la variable de semejanza más adecuada para el problema de Schlichting es  $\eta' = r/x$ , mientras que en el problema del chorro infinitamente ligero  $r_u \sim x^{1/2}$  y  $\eta = r/x^{1/2}$ , siendo  $r_u \ll r'_u$  para una  $x \gg 1$  dada. En particular, la densidad  $\rho$  para un chorro infinitamente ligero es extraordinariamente grande en todos lados, dado que la densidad de la sustancia ligera es infinitamente más pequeña que la densidad de la sustancia pesada ambiente. Para  $r < r_u$  y  $x \gg 1$  con  $x \ll 1/\epsilon$  la densidad puede aproximarse como  $\rho \sim x/Y_o = 8x$  constante en cada  $x$ . Para distancias  $x \gg 1$  la sustancia ligera se ha difundido mucho en el ambiente por efecto de la difusión molecular discutida en el apartado anterior, por lo que  $Y \ll 1$ . La densidad  $\rho = 1/Y \gg 1$  y se parecerá bastante a la densidad ambiente, que es muy grande comparada con la densidad de la sustancia ligera a medida que  $\epsilon \rightarrow 0$ . De lo anterior se deriva que el mecanismo de transporte convectivo de cantidad de movimiento en (3.2) cobra bastante más importancia en un flujo de estas características que en el problema de Schlichting donde  $\rho = 1$  en todos lados. El perfil de velocidad de un chorro infinitamente ligero será menos difusivo a medida que la diferencia de pesos moleculares se hace más grande, o lo que es lo mismo, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

La velocidad radial resultante de sustituir (3.21) en (3.8) es:

$$v = \frac{-1}{2x^{3/2}} \frac{\eta^3}{(8/3 + \eta^2)^2} \quad (3.23)$$

de donde se puede calcular la ingestión  $\phi_\infty$  de fluido para  $r \rightarrow \infty$ :

$$\phi_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} (-\rho v r) = - \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\eta}{2} \left[ F' - \frac{2F}{\eta} \right] = F_\infty = 4 \quad (3.24)$$

que coincide exactamente con el calculado por Schlichting para un chorro y ambiente de la misma composición, como se muestra en (A.25).

## Capítulo 4

# Solución General del Campo Fluidodinámico.

La formulación generalizada del problema fue ya descrita y establecida en el Capítulo 1, que en Forma Conservativa puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho ur) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho vr) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u^2 r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uvr)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + Gr(1 - \epsilon \rho) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial(\rho uYr)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vYr)}{\partial r} = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho \frac{\partial Y}{\partial r} \right) \quad (4.3)$$

con la densidad y viscosidad dinámica dadas por:

$$\rho = \frac{1}{Y + \epsilon(1 - Y)} \quad (4.4)$$

$$\mu = \frac{\epsilon^{1/2} Y + \epsilon(1 - Y)\beta}{\epsilon^{1/2} Y + \epsilon(1 - Y)} \quad (4.5)$$

y con las condiciones de contorno:

$$x = 0 : \begin{cases} 0 < r < 1 : & u = 1, \quad Y = 1, \\ r > 1 : & u = 0, \quad Y = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$x > 0 : \begin{cases} r = 0 : & \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial Y}{\partial r} = v = 0, \\ r \rightarrow \infty : & u \rightarrow 0, \quad Y \rightarrow 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

$S = \nu_j/D$  es el número de Schmidt del chorro emergente, con  $S_{H_2} = \nu_{H_2}/D_{H_2-A} = 1,39$  y  $S_{He} = \nu_{He}/D_{He-A} = 1,69$  para mezclas  $H_2$ -Aire y He-Aire respectivamente. El parámetro adimensional  $G = (\epsilon F^2)^{-1}$  mide la intensidad de la interacción gravitatoria, siendo  $F = U_j/\sqrt{Re_j ag}$  el número de Froude basado en la longitud de entrada. El parámetro  $\beta = \mu_o/\mu_j$  es el cociente de viscosidades de la sustancia pesada y la ligera. Para mezclas  $H_2$ -Aire y He-Aire, se tiene que  $\beta_{H_2} = 2,076$  y  $\beta_{He} = 0,925$  respectivamente, a una presión  $P = 1atm$  y temperatura  $T = 300K$ .

El sistema (4.1)-(4.2)-(4.3)-(4.4)-(4.5) es un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas en derivadas parciales que describe el comportamiento del vector de variables fluidodinámicas  $\Psi = [u, v, Y]$  y que ha de resolverse mediante técnicas de Integración Numérica.

## 4.1. Simulación Numérica.

El problema (4.1)-(4.2)....-(4.7) constituye un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, no lineales y acopladas, que puede clasificarse como un problema de tipo Parabólico, con dos valores reales e iguales de pendientes de la rectas características:  $\lambda = dr/dx = \pm\infty$ . Este carácter Parabólico se debe a la presencia en (4.2) y (4.3) de ambos términos de difusión parabólica  $\partial/\partial r[r\mu\partial u/\partial r]$  junto con  $\partial/\partial r[r\rho\partial Y/\partial r]$ . Por tanto, el flujo de información se propaga desde aguas arriba ( $-x$ ) hacia aguas abajo ( $+x$ ), dependiendo el campo fluidodinámico ( $u, v, Y$ ) en cierta  $x = x_o$  tan sólo de lo acontecido aguas arriba de ese punto ( $x < x_o$ ). De lo anterior se deriva que un Método Implícito en Diferencias Finitas es un método "well posed" para este problema (véase [10]). En particular, el plano computacional utilizado puede verse en la figura 4.1:

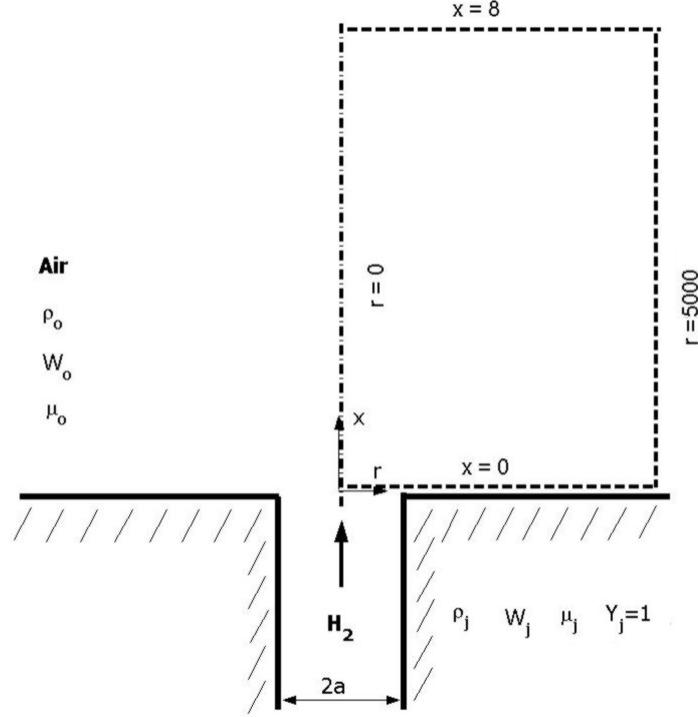


Figura 4.1: Plano Computacional:  $0 < r < 5000$  y  $0 < x < 8$ , esto es, el dominio computacional se extiende radialmente hasta 5000 radios y longitudinalmente hasta 8 longitudes de entrada hidrodinámica.

### 4.1.1. Transformación de Coordenadas.

La física del problema indica que los máximos gradientes de las variables fluidodinámicas se producen en distancias longitudinales del orden del radio del orificio  $x \sim a$ , y en distancias transversales del orden del espesor de la capa de mezcla  $\delta$ , que para distancias del orden  $x \sim a$  es mucho menor que el radio del orificio:  $\delta \sim aRe_j^{-1/2} \ll a$ , donde  $Re_j = U_j a / \nu_j$  es el número de Reynolds basado en el radio del orificio y en las propiedades hidrodinámicas de la sustancia ligera. Se hace por tanto necesaria una transformación de coordenadas  $x = x(\xi)$  y  $r = r(\eta)$ , tal que el dominio de integración es transformado en un dominio uniforme mediante una transformación biyectiva  $\{x, r\} \rightarrow \{\xi, \eta\}$ . Dicho dominio queda definido por el rectángulo  $\{0 \leq \eta \leq \eta_{max}\} \times \{0 \leq \xi \leq \xi_{max}\}$ , con pasos de integración uniformes  $h_\eta$  y  $h_\xi$ . De esta manera, ejerciendo un cambio de variable en los operadores diferenciales, se tiene que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \xi_x \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \eta_r \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (4.9)$$

para cualquier variable fluida  $\phi$ , siendo  $\xi_x(x) = \partial \xi / \partial x$  y  $\eta_r(r) = \partial \eta / \partial r$  los Coeficientes Métricos de la transformación.

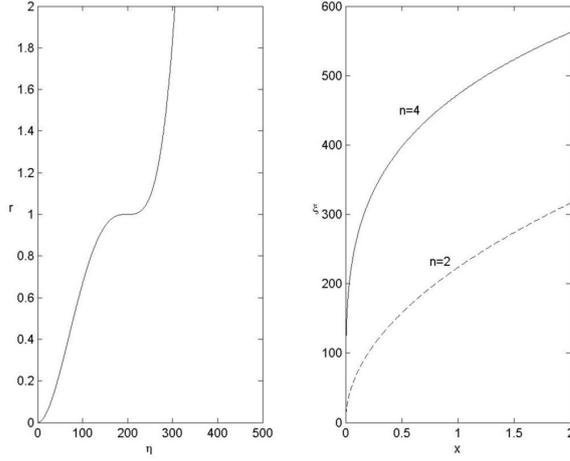


Figura 4.2: Transformación de coordenadas. En la figura de la izquierda se muestra la transformación  $r(\eta) = \sum_{k=0}^5 c_k \eta^k$ , con clusterización en torno a  $r = 1$  y  $r = 0$ , donde  $\partial r / \partial \eta \sim 0$  en ambos lados. En la figura de la derecha se muestra la transformación  $x(\xi) = a_1 \xi^n + a_2 \xi$ , para valores de  $n = 2$  (línea discontinua) y  $n = 4$  (línea continúa).

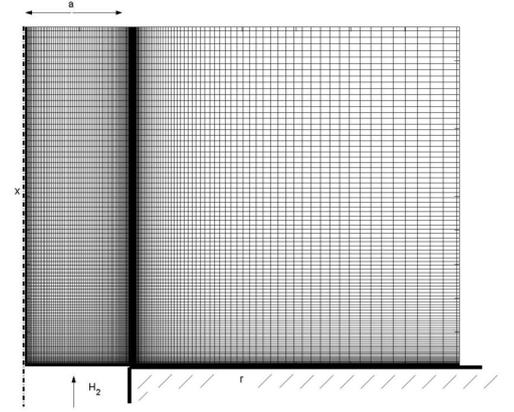


Figura 4.3: Ejemplo de Malla Computacional para  $0 < r < 4$  y  $0 < x \ll 1$ , resultado de la transformaciones (4.10) y (4.11), con isolíneas  $\xi$  (horizontales) clusterizadas en torno a  $x = 0$  e isolíneas  $\eta$  (líneas verticales) clusterizadas en torno a  $r = 0$  y  $r = 1$ . Calculado con MATLAB v6.5.

Numerosas transformaciones de coordenadas pueden ser extraídas de las referencias [9], [10] y [11], que logran clusterizar puntos computacionales en torno a una frontera o línea coordenada cualquiera. En este caso (ver figura 4.2), se generan, tanto para  $x(\xi)$  como para  $r(\eta)$ , aproximaciones polinómicas del tipo:

■ **Transformación Radial:**

$$r(\eta) = \sum_{k=0}^5 c_k \eta^k \tag{4.10}$$

tal que cumple  $r(\eta = 0) = 0$ ,  $r(\eta = \eta_o) = 1$ ,  $r(\eta = \eta_{max}) = r_{max}$ ,  $r'(\eta = 0) \sim 0$ ,  $r'(\eta = \eta_o) \sim 0$ , y  $r''(\eta = \eta_o) = 0$ . Las seis anteriores relaciones resuelven los seis coeficientes de (4.10) dejando  $\eta_o$ ,  $\eta_{max}$  y  $r_{max}$  como parámetros variables.

■ **Transformación Axial:**

$$x(\xi) = (x_{max} - a\xi_{max}) \left( \frac{\xi}{\xi_{max}} \right)^n + a\xi \tag{4.11}$$

tal que cumple  $x(\xi = 0) = 0$ ,  $x(\xi_{max}) = x_{max}$  y  $x'(\xi = 0) = a \sim 0$ , dejando libres  $n$ ,  $\xi_{max}$  y  $x_{max}$  como parámetros variables.

La derivadas  $r'(\eta)$  y  $x'(\xi)$  no pueden ser cero en ningún lado, pues de lo contrario los coeficientes métricos  $\eta_r$  y  $\xi_x$  serían infinito en ese punto, generando una singularidad en las ecuaciones de flujo. Además, ha de asegurarse que  $\xi_x > 0$  y  $\eta_r > 0$  en todos lados, para asegurar la biyectividad de la transformación  $\{x, r\} \rightarrow \{\xi, \eta\}$ , o lo que es igual, cada línea coordenada del plano  $\{x, r\}$  ha de estar unívocamente definida para un valor de su imagen en el plano computacional  $\{\xi, \eta\}$  y viceversa.

### 4.1.2. Esquema Numérico.

Se utiliza un Método Implícito de Diferencias Finitas, con precisión de segundo orden  $O(\Delta x^2, \Delta r^2)$ , sin ninguna restricción de estabilidad<sup>1</sup> según el Análisis de Von Neumann (véase [10]).

En particular, las ecuaciones gobernantes del campo fluido (4.1)-(4.2)-....-(4.5) pueden discretizarse numéricamente utilizando la Molécula Computacional mostrada en la figura 4.4.

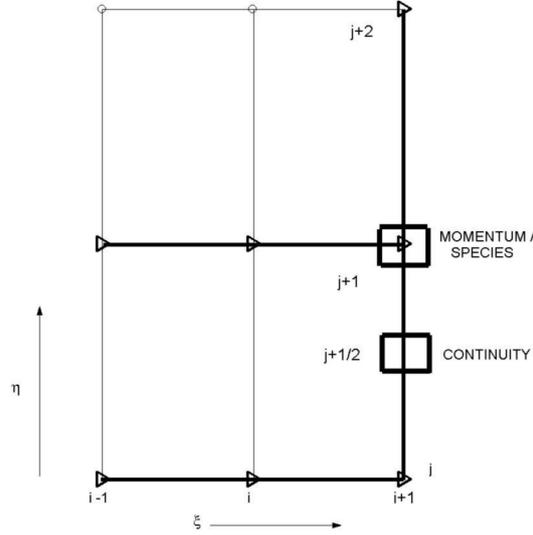


Figura 4.4: Molécula Computacional. La linealización de (4.1) se realiza en el punto  $(i+1, j+1/2)$ , la linealización de (4.2) y (4.3) se realiza en  $(i+1, j+1)$ , con  $1 \leq i \leq N_\xi - 1$  y con  $1 \leq j \leq N_\eta - 1$ .

#### ■ Continuidad:

$$v_{i+1}^{j+1} = \left( \frac{\rho_j^{i+1} r_j}{\rho_{j+1}^{i+1} r_{j+1}} \right) v_j^{i+1} - \left( \frac{\xi_x^{i+1}}{4\eta_{r(j+1/2)} \rho_{j+1}^{i+1} r_{j+1}} \right) \left( 3\rho_{j+1}^{i+1} u_{j+1}^{i+1} r_{j+1} - 4\rho_{j+1}^i u_{j+1}^i r_{j+1} + \rho_{j+1}^{i-1} u_{j+1}^{i-1} r_{j+1} + 3\rho_j^{i+1} u_j^{i+1} r_j - 4\rho_j^i u_j^i r_j + \rho_j^{i-1} u_j^{i-1} r_j \right) \quad (4.12)$$

con  $1 < j < N_\eta - 1$  y  $1 < i < N_\xi - 1$ .

#### ■ Cantidad de Movimiento:

$$C_{j+1} u_{j+2}^{i+1} + B_{j+1} u_{j+1}^{i+1} + A_{j+1} u_j^{i+1} = R_{j+1} \quad (4.13)$$

que representa una ecuación matricial  $\overline{\Phi} \cdot \overline{u} = \overline{b}$  para cada coordenada  $i+1$ , donde  $\overline{\Phi}$  representa una matriz  $N_\eta \times N_\eta$  tridiagonal, con cada una de las diagonales representadas por los coeficientes:

$$\begin{aligned} C_{j+1} &= 1/2 \eta_{r(j+1)} \rho_{j+2}^{i+1} v_{j+2}^{i+1} r_{j+2} - \eta_{r(j+1)} \eta_{r(j+3/2)} r_{j+3/2} \mu_{j+3/2}^{i+1} \\ B_{j+1} &= 3/2 \xi_x^{i+1} r_{j+1} \rho_{j+1}^{i+1} \dot{u}_{j+1} + \eta_{r(j+1)} \eta_{r(j+3/2)} r_{j+3/2} \mu_{j+3/2}^{i+1} + \eta_{r(j+1)} \eta_{r(j+1/2)} r_{j+1/2} \mu_{j+1/2}^{i+1} \\ A_{j+1} &= -1/2 \eta_{r(j+1)} \rho_j^{i+1} v_j^{i+1} r_j - \eta_{r(j+1)} \eta_{r(j+1/2)} r_{j+1/2} \mu_{j+1/2}^{i+1} \end{aligned}$$

y el vector de términos independientes  $\overline{b}$  viene dado por:

$$R_{j+1} = 2\xi_x^{i+1} r_{j+1} \rho_{j+1}^i (u_{j+1}^i)^2 - 1/2 \xi_x^{i+1} r_{j+1} \rho_{j+1}^{i-1} (u_{j+1}^{i-1})^2 + G r_{j+1} (1 - \epsilon \rho_{j+1}^{i+1})$$

con  $i = 1, 2, \dots, N_\xi - 1$  y  $j = 1, 2, \dots, N_\eta - 2$ .

<sup>1</sup>El método implícito no requiere ninguna restricción de estabilidad según el análisis de Von Neumann, pero presenta problemas si no se mantiene la diagonal dominante en la matriz de coeficientes del Algoritmo Tridiagonal de Thomas.

■ **Conservación de Especies:**

$$C_{j+1}Y_{j+2}^{i+1} + B_{j+1}Y_{j+1}^{i+1} + A_{j+1}Y_j^{i+1} = R_{j+1} \quad (4.14)$$

que representa otra ecuación matricial  $\overline{\Phi} \cdot \overline{Y} = \overline{b}$  para cada coordenada  $i + 1$ , donde  $\overline{\Phi}$  representa una matriz  $N_\eta \times N_\eta$  tridiagonal, con cada una de las diagonales representadas por los coeficientes:

$$\begin{aligned} C_{j+1} &= 1/2\eta_{r(j+1)}\rho_{j+2}^{i+1}v_{j+2}^{i+1}r_{j+2} - S^{-1}\eta_{r(j+1)}\eta_{r(j+3/2)}r_{j+3/2}\rho_{j+3/2}^{i+1} \\ B_{j+1} &= 3/2\xi_x^{i+1}r_{j+1}\rho_{j+1}^{i+1}\hat{u}_{j+1} + S^{-1}\eta_{r(j+1)}\eta_{r(j+3/2)}r_{j+3/2}\rho_{j+3/2}^{i+1} + S^{-1}\eta_{r(j+1)}\eta_{r(j+1/2)}r_{j+1/2}\rho_{j+1/2}^{i+1} \\ A_{j+1} &= -1/2\eta_{r(j+1)}\rho_j^{i+1}v_j^{i+1}r_j - S^{-1}\eta_{r(j+1)}\eta_{r(j+1/2)}r_{j+1/2}\rho_{j+1/2}^{i+1} \end{aligned}$$

y el vector de términos independientes  $\overline{b}$  viene dado por:

$$R_{j+1} = 2\xi_x^{i+1}r_{j+1}\rho_{j+1}^i Y_{j+1}^i u_{j+1}^i - 1/2\xi_x^{i+1}r_{j+1}\rho_{j+1}^{i-1} Y_{j+1}^{i-1} u_{j+1}^{i-1}$$

con  $i = 1, 2, \dots, N_\xi - 1$  y  $j = 1, 2, \dots, N_\eta - 2$ .

En todos los casos anteriores, para resolver  $u$  e  $Y$  se necesitan calcular la densidad  $\rho^{i+1}$  y la viscosidad dinámica  $\mu^{i+1}$ , que forman parte de la solución. Para ello se propone que  $\rho_{j+1}^{i+1} = 1/[\hat{Y}_{j+1} + \epsilon(1 - \hat{Y}_{j+1})]$  y de forma parecida  $\mu_{j+1}^{i+1} = \mu(\hat{Y}_{j+1})$ , buscando la convergencia de la solución cuando  $|u^{i+1} - \hat{u}| + |Y^{i+1} - \hat{Y}| < \tau$  con  $\tau \rightarrow 0$ .

La ecuaciones matriciales (4.14) y (4.13) están influenciadas por las condiciones de contorno en  $r = 0$  y  $r \rightarrow \infty$ , dadas por (4.7). Por ejemplo, para la velocidad, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C_{N_\eta-1} & B_{N_\eta-1} & A_{N_\eta-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & C_2 & B_2 & A_2 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{N_\eta} \\ u_{N_\eta-1} \\ \dots \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{N_\eta-1} \\ \dots \\ R_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para  $j = 1$  existe la condición de contorno de simetría  $\partial u / \partial r = 0$ , que generalizadamente se puede escribir como la combinación lineal de tres velocidades  $\lambda_3 u_3 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 u_1 = 0$ . Para segundo orden de precisión  $O(\Delta r^2)$  en la condición de contorno en el eje se tiene que  $\lambda_1 = -3/2$ ,  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = -1/2$ , resultando la matriz  $\overline{\Phi}$  no tridiagonal, pudiéndose fácilmente convertir en tridiagonal sin más que multiplicar la fila 1 por  $C_2/\lambda_3$  y restarle la fila 2. Para primer orden de precisión  $O(\Delta r)$  se tiene que  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  y  $\lambda_3 = 0$ , dando como resultado la matriz  $\overline{\Phi}$  tridiagonal.

El Algoritmo Tridiagonal de Thomas (TDMA) propone una soluciones recursivas para  $Y$  y  $u$  del tipo:

$$u_j^{i+1} = E_j [\omega_m u_{j+1}^{i+1} + (1 - \omega_m) \hat{u}_{j+1}] + F_j \quad (4.15)$$

$$Y_j^{i+1} = E_j [\omega_s Y_{j+1}^{i+1} + (1 - \omega_s) \hat{Y}_{j+1}] + F_j \quad (4.16)$$

con  $j = 1, 2, \dots, N_\eta - 1$ , donde  $\omega_m$  y  $\omega_s$  son parámetros de relajación, y donde  $E_j$  y  $F_j$  vienen dados por las fórmulas recursivas:

$$E_{j+1} = \frac{-C_{j+1}}{B_{j+1} + E_j A_{j+1}} \quad F_{j+1} = \frac{R_{j+1} - A_{j+1} F_j}{B_{j+1} + E_j A_{j+1}} \quad (4.17)$$

resultantes de eliminar la diagonal inferior de  $\overline{\Phi}$ . Las expresiones (4.17) requieren una condición inicial para  $j = 1$ , representativa de la condición de contorno de simetría  $\partial u / \partial r = 0$  o también  $\partial Y / \partial r = 0$  en  $r = 0$ . Sin más que realizar la eliminación gaussiana de la diagonal inferior en la primera fila de  $\overline{\Phi}$ , como ya se indicó antes, se obtiene:

$$E_1 = -\frac{-C_2 \lambda_2 / \lambda_3 - B_2}{C_2 \lambda_1 / \lambda_3 - A_2} \quad F_1 = \frac{-R_2}{C_2 \lambda_1 / \lambda_3 - A_2} \quad (4.18)$$

Para precisión de segundo orden  $O(\Delta r^2)$  en la condición de contorno de simetría, se tiene que  $\lambda_1 = -3/2$ ,  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = -1/2$ , resultando  $E_1 = (4/3 C_2 + B_2) / (C_2/3 - A_2)$  y  $F_1 = -R_2 / (C_2/3 - A_2)$ . Para precisión de primer orden  $O(\Delta r)$ , se tiene que  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  y  $\lambda_3 = 0$ , resultando  $E_1 = 1$  y  $F_1 = 0$ .

Para la ecuación de Conservación de Especies, la ecuación matricial resultante (4.13) para cada  $x$  se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & \dots & \dots & 0 \\ C_{N\eta-1} & B_{N\eta-1} & A_{N\eta-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & C_2 & B_2 & A_2 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_3 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_{N\eta} \\ Y_{N\eta-1} \\ \dots \\ Y_2 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{N\eta-1} \\ \dots \\ R_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes  $\overline{\Phi}$  resultante es pues no tridiagonal, por lo que hay que reducirla mediante el método gaussiano descrito anteriormente a una tridiagonal. Para  $j = 1$  se satisface la condición de contorno de axilsimetría  $\partial Y/\partial r = 0$  con los coeficientes del TDMA  $E_1$  y  $F_1$  dados por (4.18). Dada la alta difusividad de elementos como el  $H_2$  en Aire, cuya distancia de penetración difusiva supera ampliamente el radio característico de velocidad, conviene dejar libre el valor de  $Y$  en la frontera del dominio computacional y alternativamente utilizar la condición de contorno ejercida por la propia ecuación de conservación de especies para distancias radiales mucho mayores que el radio característico de velocidad:  $S\phi_\infty \partial Y/\partial r = \partial/\partial r[r\rho \partial Y/\partial r]$ , donde  $\phi_\infty = -\rho\nu r|_\infty$  es el entrainment para  $r = r_o \rightarrow \infty$ . Esta expresión puede ser integrada para dar  $S\phi_\infty Y = \rho_o r_o \partial Y/\partial r$ . La discretización numérica de esta ecuación diferencial proporciona una expresión del tipo  $\gamma_3 Y_{N\eta} + \gamma_2 Y_{N\eta-1} + \gamma_1 Y_{N\eta-2} = 0$ , con  $\gamma_3 = S\phi_\infty - 1,5\eta_{r(N\eta)}\rho_o r_o$ ,  $\gamma_2 = 2\eta_{r(N\eta)}\rho_o r_o$  y  $\gamma_1 = -0,5\eta_{r(N\eta)}\rho_o r_o$ .

Los valores de  $E_{N\eta}$  y  $F_{N\eta}$  se obtienen al eliminar el elemento  $\gamma_1$  de la matriz de coeficientes, obteniendo:

$$E_{N\eta} = 0; \quad Y_{N\eta} = F_{N\eta} = \frac{-R_{N\eta-1} - (A_{N\eta-1}\gamma_2/\gamma_1 - B_{N\eta-1})F_{N\eta-1}}{(A_{N\eta-1}\gamma_3/\gamma_1 - C_{N\eta-1}) + (A_{N\eta-1}\gamma_2/\gamma_1 - B_{N\eta-1})E_{N\eta-1}} \quad (4.19)$$

## 4.2. Solución General Numérica Particularizada para Mezclas $H_2$ -Aire y He-Aire a altos números de Froude: $F \gg \epsilon^{-1/2}$ .

En este apartado se integra numéricamente el problema (4.1)-(4.2)....-(4.7) asumiendo un número de Froude  $F$  lo suficientemente grande de forma que  $F \gg \epsilon^{-1/2}$  y por tanto  $G \ll 1$ , siendo el término gravitacional despreciable frente a los términos de transporte convectivo de cantidad de movimiento.

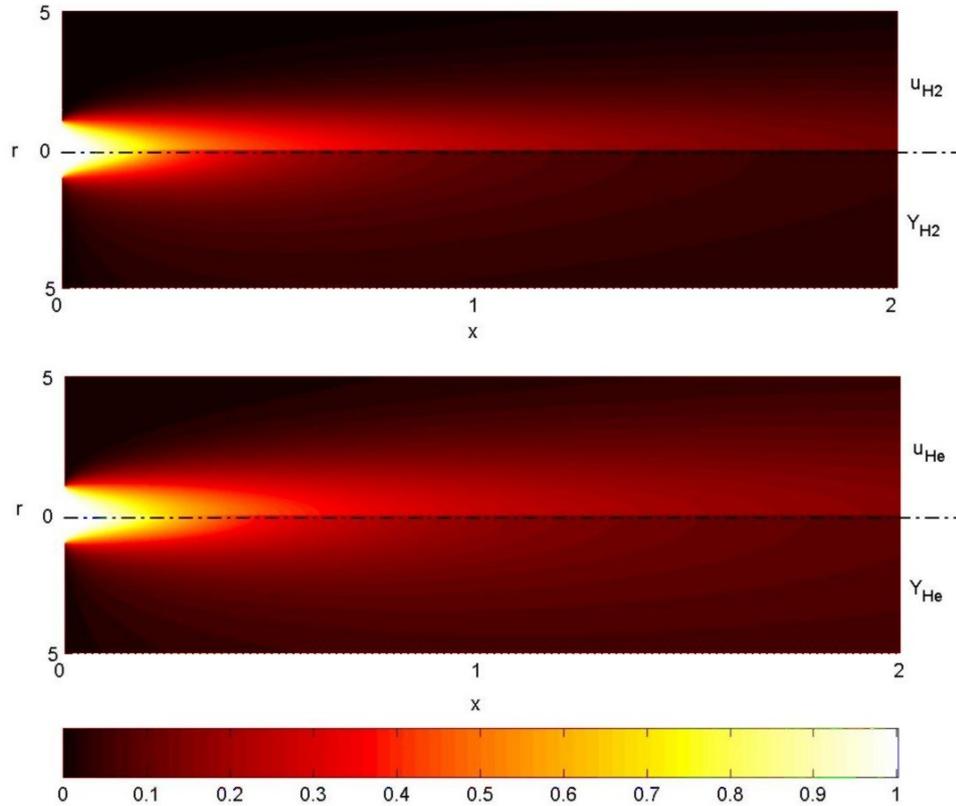


Figura 4.5: Contornos de velocidad axial  $u$  y fracción másica  $Y$  de la sustancia ligera para una mezcla  $H_2$ -Aire (parte superior) y He-Aire (parte inferior). Calculado con MATLAB v6.5.

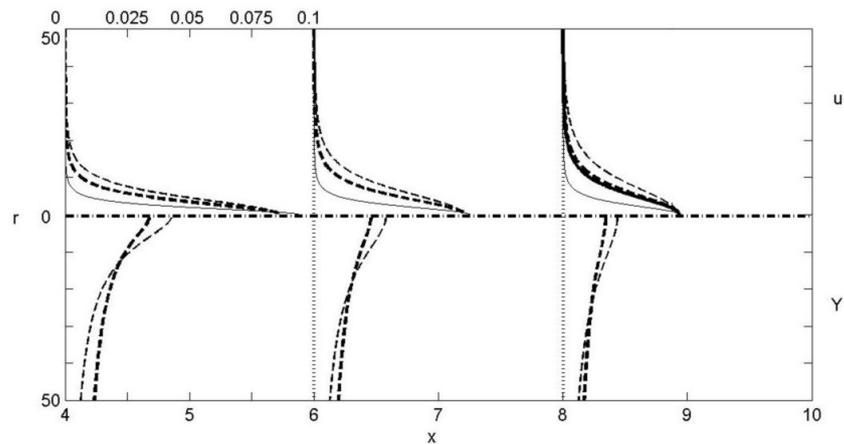


Figura 4.6: Perfil de velocidad axial analítico para un chorro infinitamente ligero (línea continua) dado por (3.22), y perfiles de velocidad axial obtenidos por integración numérica para una mezcla  $H_2$ -Aire (línea discontinua gruesa) y para una mezcla He-Aire (línea discontinua fina), en  $x = 4, 6, 8$ . Para  $x = 8$  se muestra así mismo el perfil de Schlichting esperado a  $x \gg 1/\epsilon$ , dado por (4.23) (línea continua gruesa). Igualmente se muestran perfiles de fracción másica obtenidos mediante integración numérica para mezclas  $H_2$ -Aire (línea discontinua gruesa) y He-Aire (línea discontinua fina). La escala de ambas magnitudes se muestra en la esquina superior izquierda.

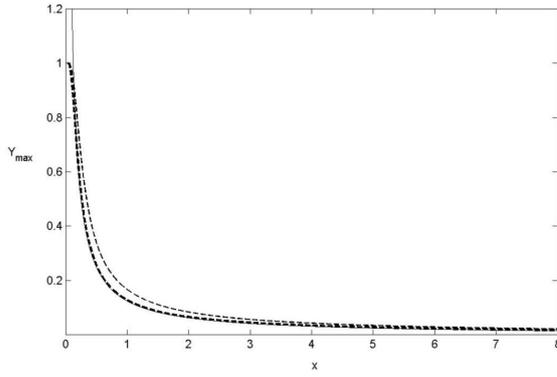


Figura 4.7: Decaimiento del valor de la fracción másica  $Y$  en el eje, obtenido por integración numérica, para mezclas  $H_2$ -Aire (línea discontinua gruesa) y He-Aire (línea discontinua fina), junto con la evolución teórica prevista por (3.6) (línea continua), es decir,  $Y = 1/8x$ .

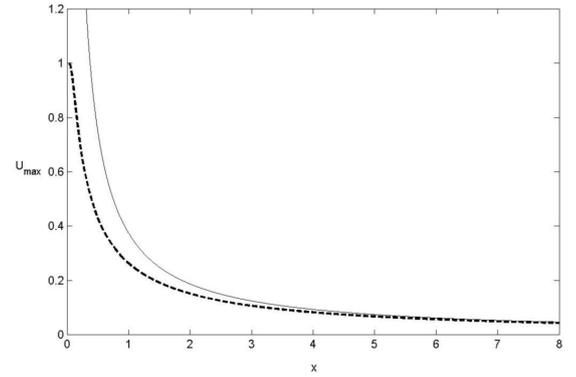


Figura 4.8: Decaimiento del valor de la velocidad axial  $u$  en el eje, obtenido por integración numérica, para mezclas  $H_2$ -Aire (línea discontinua gruesa) y He-Aire (línea discontinua fina), junto con la evolución teórica prevista por (3.22) (línea continua), es decir,  $u = 3/8x$ .

Las figuras 4.5-4.6-4.7-4.8 resumen los resultados más significantes obtenidos más significantes de la integración numérica de (4.1)-(4.2)...-(4.7).

En particular, el  $H_2$  presenta una mayor difusividad molecular en Aire que el He, presentando la forma de los perfiles de fracción másica una forma bastante más plana. Ello es debido a la ligereza del  $H_2$  comparado con el Aire ( $\epsilon \ll 1$ ), y al pequeño tamaño de su molécula. De lo anterior se deriva que la curva de decaimiento de la fracción másica  $Y$  del  $H_2$  estará por debajo de la del He, y a su vez ambas por encima del límite asintótico  $\epsilon \rightarrow 0$  dado por  $Y = 1/8x$ , que representa el decaimiento de un chorro infinitamente ligero y por tanto de la máxima difusividad posible. Por el contrario, el campo de velocidad axial para mezclas He-Aire presenta una mayor difusividad transversal de cantidad de movimiento, debido a que comparativamente la importancia del transporte convectivo de cantidad de movimiento para esta mezcla comparada con la importancia del transporte difusivo, es menor en esta mezcla que en la de  $H_2$ -Aire por ser la densidad e inercia menor.

En realidad se pueden distinguir tres zonas diferenciadas en el campo fluidodinámico resultante:

- Una primera zona de campo cercano, en la que se produce el desarrollo del chorro y en la que los gradientes axiales  $\partial/\partial x$  de las variables fluidodinámicas son importantes. Esta zona abarca hasta la longitud de entrada hidrodinámica.
- Una segunda zona, con  $x$  tales que  $x \ll 1/\epsilon$ , esto es, donde la aproximación (3.6) es válida para un chorro con  $\epsilon > 0$ . Es decir, donde  $\rho = 1/[Y + \epsilon(1 - Y)] = x/[Y_o + \epsilon(x - Y_o)] \sim x/Y_o$ , lo cual se cumple si  $x \ll 1/\epsilon$ . Como puede observarse en la figura 4.6, el perfil de fracción másica es casi plano en todo el radio de velocidad del chorro, y el perfil de velocidad axial se aproxima según  $\epsilon \rightarrow 0$  al perfil asintótico calculado en (3.22).
- Una tercera zona, después de una transición progresiva entre el perfil asintótico calculado en (3.22) y un nuevo perfil de Schlichting. En efecto, para  $x \gg 1/\epsilon$ , se tiene que  $\rho \sim 1/\epsilon$  en todos lados, es decir, la densidad es muy parecida a la del Aire. El problema fluidodinámico puede reescribirse, para  $x \gg 1/\epsilon$  como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(vr) = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{\epsilon} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \beta \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.21)$$

con las condiciones de contorno  $u(r \rightarrow \infty) = 0$  y  $v(r = 0) = \partial u / \partial r = 0$ , y la condición integral  $2 \int_0^\infty \epsilon^{-1} u^2 r dr = 1$ . El escalar  $\beta = \mu_o / \mu_j$  corresponde al límite del modelo de Rosner para  $x \gg 1/\epsilon$ , donde  $Y \sim \epsilon$  y  $\mu \rightarrow \beta$  en todos lados. La solución general del problema (4.20)-(4.21) puede obtenerse mediante técnicas de semejanza, en términos de la nueva variable de semejanza  $\eta = r/x$ . El problema de semejanza resultante es  $-1/2(F'^2/\eta)' = \beta [\eta (F'/\eta)']'$  con las condiciones de contorno  $F(0) = F'(0) = 0$  y  $F'(\infty) = 0$ . La autofunción de corriente resultante es:

$$F = \frac{4\beta\eta^2}{64\epsilon\beta^2/3 + \eta^2} \quad (4.22)$$

y por tanto el perfil de velocidad axial viene dado por:

$$u = \frac{1}{x} \frac{512\epsilon^2 \beta^2 / 3}{(64\epsilon\beta^2 / 3 + \eta^2)^2} \quad (4.23)$$

De lo anterior se deriva que el entrainment de fluido es  $\phi_\infty = -\rho v r|_\infty = F_\infty = 4\beta$  para  $x \gg 1/\epsilon$ . Así mismo, el decaimiento de la velocidad axial en el eje no se ve influenciado por el valor de  $\epsilon$  incluso a estas distancias, pero sí es influenciado por el valor de  $\beta$ . En particular, la evolución de  $u$  sobre el eje de axilsimetría es  $u = 3/(8\beta^2)$  para  $x \gg 1/\epsilon$ . El parámetro  $\beta$  representa pues, la influencia del modelo de Rosner en la solución asintótica a grandes distancias axiales. El parámetro  $\beta$  viene impuesto exteriormente por la naturaleza atómica de los gases componentes, según se vió en las expresiones derivadas del Potencial de Lennard-Jones. Para  $\epsilon \rightarrow 0$  el problema (4.21)-(4.22) es singular, y la solución (4.23) carece de sentido físico.

### 4.3. Solución General Numérica Particularizada para Mezclas $H_2$ -Aire a números de Froude moderados: $F \sim O(\epsilon^{-1/2})$ .

En este apartado se integra numéricamente el problema (4.1)-(4.2)....-(4.7) asumiendo un número de Froude  $F$  moderado de forma que  $F \sim O(\epsilon^{-1/2})$  y por tanto  $G \sim O(1)$ , colaborando el término gravitacional activamente en el movimiento fluido en forma de fuerza de flotación positiva.

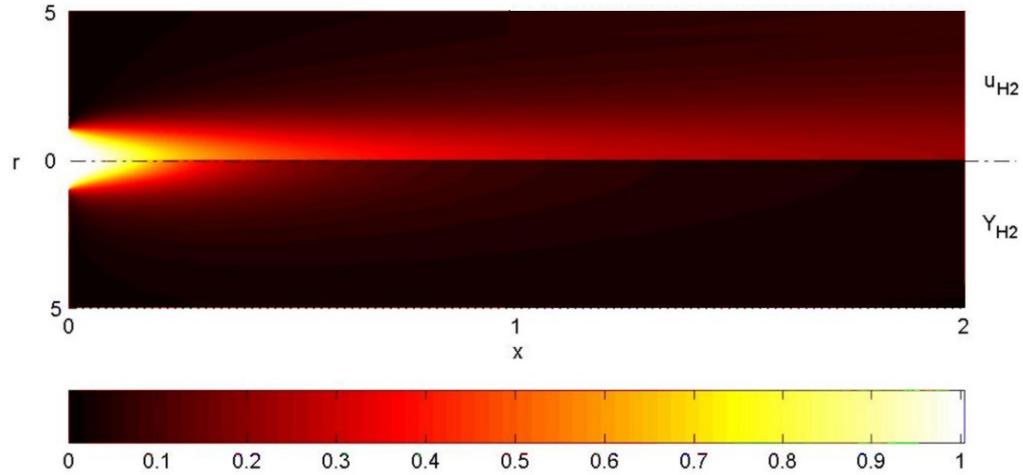


Figura 4.9: Contornos de velocidad axial  $u$  y fracción másica  $Y$  de la sustancia ligera para una mezcla  $H_2$ -Aire y  $G = 0,1$ . Calculado con MATLAB v6.5.

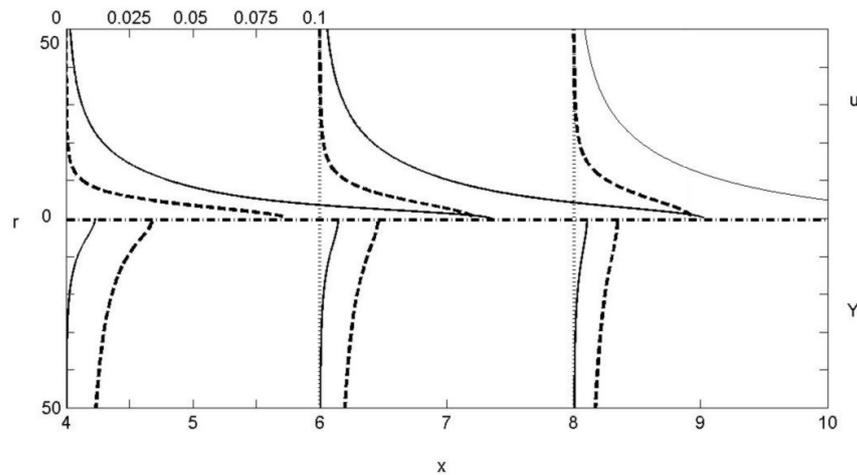


Figura 4.10: Perfiles de velocidad axial y fracción másica obtenidos por integración numérica para una mezcla  $H_2$ -Aire con  $G = 0$  (línea discontinua gruesa) y  $G = 0,1$  (línea continua), en  $x = 4, 6, 8$ . La escala de ambas magnitudes se muestra en la esquina superior izquierda.

La implementación de la fuerza gravitacional en el cálculo a través del término adicional  $G(1 - \rho\epsilon)$  actúa como fuente de cantidad de movimiento en regiones del espacio donde existe sustancia ligera al menos en una cantidad  $Y \sim \epsilon$ . La fuerza de flotación induce un movimiento macroscópico de convección natural, que aumenta el entrainment  $\phi_\infty$  de Aire diluyendo la mezcla y disminuyendo la fracción másica  $Y$  de Hidrógeno, de forma que el gasto másico de sustancia ligera se mantiene constante  $M = \int_0^\infty \rho Y u r dr = 1/2$  y aumenta el radio característico de velocidad.

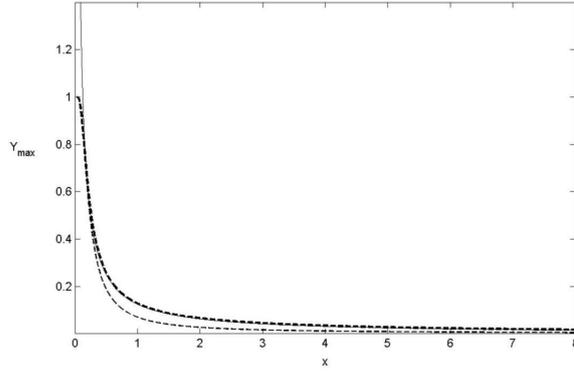


Figura 4.11: Decaimiento del valor de la fracción másica  $Y$  en el eje, obtenido por integración numérica, para mezclas  $H_2$ -Aire con  $G = 0$  (línea discontinua gruesa) y  $G = 0,1$  (línea discontinua fina), junto con la evolución teórica prevista por (3.6) (línea continua), es decir,  $Y = 1/8x$ .

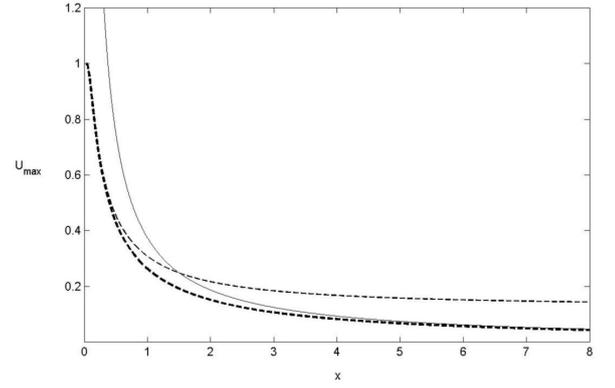


Figura 4.12: Decaimiento del valor de la velocidad axial  $u$  en el eje, obtenido por integración numérica, para mezclas  $H_2$ -Aire con  $G = 0$  (línea discontinua gruesa) y  $G = 0,1$  (línea discontinua fina), junto con la evolución teórica prevista por (3.22) (línea continua), es decir,  $u = 3/8x$ .

En las figuras 4.11 y 4.12 se observa el decaimiento sobre el eje de ambas magnitudes  $u$  e  $Y$ . Por efecto del movimiento de convección natural inducido y el aumento del entrainment  $\phi_\infty$ , se produce una dilución progresiva de sustancia ligera, disminuyendo la fracción másica más rápidamente que en el caso con  $G = 0$ . Por otro lado, el flujo adicional de cantidad de movimiento introducido por la fuerza gravitacional revierte en una aceleración generalizada de la mezcla hasta radios en los que  $Y \sim \epsilon$  donde  $\rho\epsilon \sim 1$ , y en particular aumentando la velocidad máxima en el eje por encima de la prevista para  $G = 0$ .

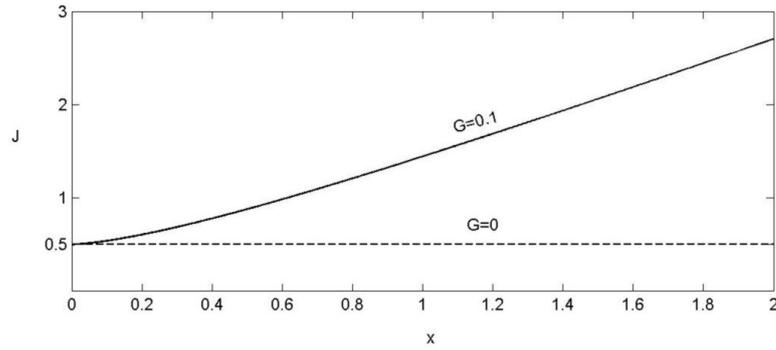


Figura 4.13: Flujo de cantidad de movimiento  $J = \int_0^\infty \rho u^2 r dr = \int_0^x \left\{ \int_0^\infty Gr(1 - \epsilon\rho) dr \right\} dx + 1/2$  para  $G = 0$  (línea discontinua) y  $G = 0,1$  (línea continua).

Igualmente se observa que dicha aceleración es sólo ostensible a partir de distancias  $x^*$  donde el flujo adicional de cantidad de movimiento introducido por la gravedad es comparable con el flujo inicial de cantidad de movimiento en el inyector, esto es  $\int_0^{x^*} \left\{ \int_0^\infty Gr(1 - \epsilon\rho) dr \right\} dx \sim 1$ , de donde  $x^* \sim G^{-1/2}$ .

## Apéndice A

# Chorro Laminar Axilsimétrico: Solución de Schlichting (Campo Lejano) para $\epsilon = 1$ .

La descripción del estado estacionario de chorro laminar incompresible a través de un orificio de diámetro  $2a$ , a altos números de Reynolds, puede realizarse mediante la aproximación de capa límite con errores del orden  $O(Re_j^{-2})$ . Para el caso de ambiente y sustancia emergente de la misma composición, las ecuaciones (1.29)-(1.30)-(1.31)-(1.32)-(1.33) se reducen para  $\epsilon = 1$ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{v}r) = \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial r} = \frac{1}{S} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial r} \right) \quad (\text{A.3})$$

con las siguientes condiciones de contorno:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} : \begin{cases} \mathbf{0} < r < 1 : & \mathbf{u} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{1} \\ r > 1 : & \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{x} > \mathbf{0} : \begin{cases} r = \mathbf{0} : & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial r} = \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ r \rightarrow \infty : & \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

donde la coordenada axial se ha adimensionalizado con la longitud de entrada hidrodinámica  $Re_j a$  y la coordenada radial con el radio del orificio  $a$ , y  $S = \nu/D$  es el número de Schmidt de la sustancia para un estado termodinámico dado. La ecuación (A.3) modeliza el mezclado de la sustancia emergente en el ambiente, ambos de la misma composición.

La ecuación (A.2) puede formularse en Forma Conservativa utilizando Continuidad, e integrarse una vez respecto de  $r$ :

$$\int_0^\infty \frac{\partial u^2 r}{\partial x} dr - \int_0^\infty \frac{\partial uvr}{\partial r} dr = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr \quad (\text{A.6})$$

Dado que el segundo término de la izquierda y el de la derecha se anulan, y el operador  $\partial/\partial x$  puede salir fuera de la integral, se obtiene una Ley de Conservación Integral para la Cantidad de Movimiento axial:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u^2 r dr = 0 \quad (\text{A.7})$$

Esta ecuación puede integrarse respecto de  $x$ . La constante de integración resultante se obtiene de la condición de contorno en  $x = 0$ , esto es, el tipo de perfil de descarga. En el caso de perfil uniforme  $u_o = 1$ , y el flujo de cantidad de movimiento axial se conserva a lo largo de todo  $x$ :

$$2 \int_0^\infty u^2 r dr = 1 \quad (\text{A.8})$$

De forma parecida puede integrarse la ecuación de Conservación de Especies (A.3), dando como resultado la conservación del gasto másico de la sustancia inyectada:

$$2 \int_0^{\infty} uYrdr = 1 \quad (\text{A.9})$$

A distancias axiales mucho mayores que la longitud de entrada hidrodinámica,  $x \gg 1$ , la velocidad axial se ha visto reducida en una magnitud del orden de sí misma por efecto de la viscosidad. En esta zona el problema fluidodinámico posee solución exacta, anteriormente calculada por Schlichting [1], y puede inferirse por técnicas de semejanza sin más que proponer un agrupamiento que conserve en la transformación la invarianza de las ecuaciones (A.1) y (A.2). En particular, dado que a distancias  $x \gg 1$  la variación de la componente axial de la cantidad de movimiento ha de ser del mismo orden que el transporte por difusión trasversal, por lo que  $u^2/x \sim u/r^2$ . Por otro lado, debido a la conservación del flujo de cantidad de movimiento axial:  $u^2r^2 \sim 1$ . De lo anterior se deriva que la variable de semejanza adecuada para este problema es  $\eta = r/x$  por lo que el radio característico de mezclado del chorro variará como  $r \sim x$ , y que la velocidad axial puede describirse como  $u = U(\eta)/x$ , donde  $U(\eta)$  es cierta función a determinar. Igualmente ha de cumplirse en la ecuación de Conservación de Especies, donde el mezclado por convección de la sustancia emergente ha de equilibrarse con el mezclado por difusión molecular:  $uY/x \sim Y/r^2$ . Por otro lado, de la conservación del gasto másico de la sustancia emergente:  $uYr^2 \sim 1$ . De lo anterior se deduce que la fracción másica puede descomponerse como la multiplicación de una función únicamente de  $\eta$  y otra sólomente de  $x$ , esto es,  $Y = \Psi(\eta)/x$ . El valor característico de la función de corriente para este problema será por tanto  $\psi \sim x$ . Por tanto la función de corriente puede escribirse como  $\psi = xF(\eta)$  donde  $F$  representa la autofunción de corriente.

De la definición de función de corriente:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{A.10})$$

y escribiendo las velocidades como función de la variable de semejanza:

$$u = \frac{1}{x} \frac{F'}{\eta}; \quad v = \frac{1}{x} \left[ F' - \frac{F}{\eta} \right]; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \frac{F'}{\eta} - \frac{\eta}{x^2} \left( \frac{F'}{\eta} \right)'; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{x^2} \left( \frac{F'}{\eta} \right)';$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{x^3} \frac{1}{\eta} \left[ \eta \left( \frac{F'}{\eta} \right)' \right]'; \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación (A.2), se obtiene:

$$-\frac{F'^2}{\eta} - F \left( \frac{F'}{\eta} \right)' = \left[ \eta \left( \frac{F'}{\eta} \right)' \right]' \quad (\text{A.12})$$

y teniendo en cuenta la relación diferencial:

$$-\frac{F'^2}{\eta} - F \left( \frac{F'}{\eta} \right)' = -\frac{1}{2} \left( \frac{F'^2}{\eta} \right)' \quad (\text{A.13})$$

el problema diferencial resultante es:

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{F'^2}{\eta} \right)' = \left[ \eta \left( \frac{F'}{\eta} \right)' \right]' \quad (\text{A.14})$$

con condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \eta = 0 : & \mathbf{F} = \mathbf{F}' = \mathbf{0}, \\ \eta \rightarrow \infty : & \mathbf{F}' = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Integrando (A.14) una vez e imponiendo la condición  $F' = 0$  en  $\eta \rightarrow \infty$ :

$$\left( \frac{F'}{\eta} \right)' = -\frac{F'^2}{2\eta^2} \quad (\text{A.16})$$

la cual puede ser puesta en la forma:

$$\frac{1}{2} F'^2 = 2F' - (\eta F')' \quad (\text{A.17})$$

Integrando otra vez e imponiendo  $F = 0$  en  $\eta = 0$ :

$$\frac{1}{2}F^2 = 2F - \eta F' \quad (\text{A.18})$$

Esta última expresión puede ser integrada para dar:

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{F}{4-F}\right) = \ln\eta + A \quad (\text{A.19})$$

donde  $A = \ln(c)$  es una constante aparentemente indeterminada. Por tanto:

$$F = \frac{4c^2\eta^2}{1+c^2\eta^2} \quad (\text{A.20})$$

representa el perfil de semejanza para la función autosemejante de corriente  $F(\eta)$ . A partir de esto pueden escribirse los perfiles de velocidad usando las relaciones (A.11):

$$u = \frac{1}{x} \frac{8c^2}{(1+c^2\eta^2)^2} \quad v = \frac{1}{x} \left[ \frac{4c^2\eta(1-c^2\eta^2)}{(1+c^2\eta^2)^2} \right] \quad (\text{A.21})$$

La constante de integración  $c$  se determina a partir de la Ley de Conservación Integral para la Cantidad de Movimiento axial (A.8):

$$2 \int_0^\infty u^2 r dr = 2 \int_0^\infty \left( \frac{8c^2}{(1+c^2\eta^2)^2} \right)^2 \eta d\eta = \frac{2 \cdot 32}{3} c^2 = 1 \quad (\text{A.22})$$

de donde se obtiene  $c^2 = 3/64$ . Por tanto:

$$\mathbf{F} = \frac{4\eta^2}{64/3 + \eta^2} \quad (\text{A.23})$$

y sustituyendo en (A.21)

$$\mathbf{u} = \frac{1}{x} \frac{512/3}{(64/3 + \eta^2)^2} \quad (\text{A.24})$$

corresponde al perfil teórico obtenido por el análisis de semejanza en el campo lejano, y es la denominada Solución de Schlichting. Por otro lado, se puede comprobar que la ingestión  $\phi_\infty$  de fluido a distancias  $\eta \rightarrow \infty$  para cierta  $x \gg 1$  tiende a un valor asintótico dado por:

$$\phi_\infty = - \lim_{r \rightarrow \infty} vr = F_\infty = 4 \quad (\text{A.25})$$

Del mismo modo, pueden introducirse las relaciones (A.11) en la ecuación de Conservación de Especies, teniendo en cuenta que  $\partial Y/\partial x = -\Phi/x^2 - \eta\Phi'/x^2$ , y  $\partial Y/\partial r = \Phi'/x^2$ , resulta el problema diferencial:

$$-\mathbf{S}(\mathbf{F}\Phi)' = [\eta\Phi']' \quad (\text{A.26})$$

con las condiciones de contorno  $\Phi(\mathbf{0}) = \Phi'(\infty) = \mathbf{0}$ , cuya solución general es:

$$\Phi = \frac{C}{(64/3 + \eta^2)^{2S}} \quad (\text{A.27})$$

donde  $C$  es una constante que queda determinada al usar la ley integral (A.9):

$$2 \int_0^\infty uYr dr = \frac{1024}{3} C \int_0^\infty \frac{\eta}{(64/3 + \eta^2)^{2S+2}} d\eta = \frac{8C}{2S+1} \left(\frac{64}{3}\right)^{-2S} = 1 \quad (\text{A.28})$$

de donde se obtiene que  $C = (2S+1)(64/3)^{2S}/8$ . Por tanto, el perfil de fracción másica en el campo lejano tiene solución analítica, y viene dado por:

$$\mathbf{Y} = \frac{\Phi(\eta)}{x} = \frac{2S+1}{8x} \left(\frac{64}{3}\right)^{2S} \frac{1}{(64/3 + \eta^2)^{2S}} \quad (\text{A.29})$$

## Apéndice B

# Chorro Laminar Axilsimétrico: Solución de Blasius (Campo Cercano) para $\epsilon = 1$ .

Se realizan en este apartado las consideraciones necesarias para obtener la solución de semejanza en el campo cercano ( $x \ll 1$ ) de un chorro laminar descargando a un ambiente de la misma composición, flujo representado por las expresiones (A.1)-(A.2)-(A.7) citadas anteriormente.

Para  $x \ll 1$  la velocidad característica del chorro emergente es de orden unidad  $u \sim 1$  y el término de convección longitudinal de (A.2) ha de ser del mismo orden que el término difusivo:  $u^2/x \sim u/r^2$ . De lo anterior se deriva que  $r \sim x^{1/2}$  y por tanto la variable de semejanza más adecuada para la descripción de este problema es  $\eta = (r - 1)/x^{1/2}$ .

Dado que en esta zona el espesor de la capa de mezcla  $\delta$  es muy pequeño comparado con el radio del orificio  $a$ , las variaciones radiales pueden considerarse como variaciones en coordenadas localmente cartesianas dado el gran radio de curvatura  $R$  que presenta la capa anular de mezcla comparado con  $\delta$ . En efecto, realizando el cambio de variable  $r = R - r^*$  con  $R \sim a$  y  $r^* \sim \delta$  el operador Laplaciano radial  $\Delta_r = 1/r \partial / \partial r [r \partial / \partial r]$  se convierte en  $\Delta_{r^*} = \partial^2 / \partial r^{*2}$  pues  $R \gg r^*$  en todo el rango.

De las anteriores consideraciones se tiene que el valor característico de la función de corriente de acuerdo es  $\psi_o \sim x^{1/2}$ , por lo que  $\psi = x^{1/2} F(\eta)$ . De la definición de la función de corriente, teniendo en cuenta que  $r \sim 1$  para  $x \ll 1$ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{B.1})$$

y escribiendo las velocidades como función de la variable de semejanza:

$$u = F'; \quad v = \frac{\eta}{2x^{1/2}} \left[ F' - \frac{F}{\eta} \right]; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x} F''; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{F''}{x^{1/2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{F'''}{x}; \quad (\text{B.2})$$

Sustituyendo en (A.2) se obtiene la ecuación diferencial de Blasius:

$$\mathbf{F}''' + \frac{\mathbf{F}\mathbf{F}''}{2} = 0 \quad (\text{B.3})$$

que ha de ser integrada con las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \eta \rightarrow +\infty : & \mathbf{F}' \rightarrow 0, \\ \eta \rightarrow -\infty : & \mathbf{F}' \rightarrow \eta, \quad \mathbf{F} \rightarrow \eta \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

No existe solución analítica para el problema (B.3)-(B.4) que ha de ser resuelto numéricamente mediante técnicas de Disparo No Lineal.

En las figuras anteriores pueden observarse los perfiles autosemejantes de Blasius  $u = F'(\eta)$  y  $F = F(\eta)$  resultado de integrar el problema (B.3)-(B.4) mediante técnicas de disparo no lineal, cuyo método se ha descrito

ya previamente. Hay que hacer notar que el problema de Blasius es independiente de las propiedades del fluido al menos formulado en variables adimensionales. Este problema podría representar el flujo de un chorro de Aire-Aire, o cualquier otro par de sustancias de la misma composición.

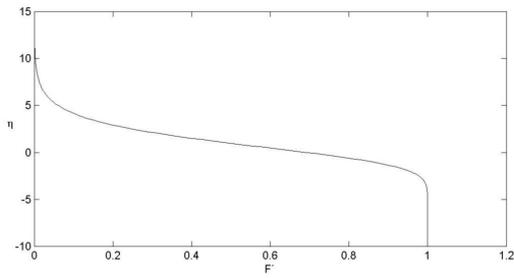


Figura B.1: Perfil autosemejante de velocidades de Blasius  $u = u(\eta)$ , en la capa de mezclado inicial para  $x \ll 1$ .

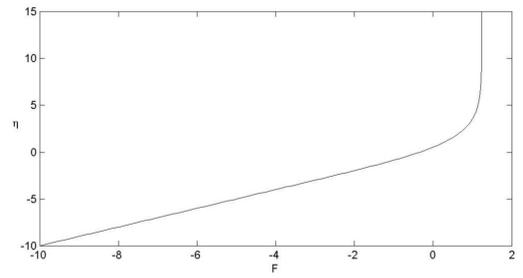


Figura B.2: Perfil autosemejante  $F = F(\eta)$  de Blasius. Para  $\eta \rightarrow +\infty$  se tiene  $F = F_\infty = 1,236$ .

## Apéndice C

# Validación del Código Numérico: Solución General Numérica de un Chorro Laminar Axilsimétrico con $\epsilon = 1$ .

En este apartado se realiza la validación del código numérico empleado en el Capítulo 4, en un caso cuya solución es bien conocida y ha sido tratada ya en los Apéndices A y B, y más extensamente en [1] y [14]: un flujo en configuración de chorro laminar axilsimétrico descargando a un ambiente de la misma composición  $\epsilon = 1$ , en cuyo caso el conjunto de ecuaciones (4.1)-(4.2)-(4.3)-(4.4)-(4.5)-(4.6)-(4.7) se reducen, haciendo  $\rho = \mu = 1$  a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(ur) + \frac{\partial}{\partial r}(vr) = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial(u^2r)}{\partial x} + \frac{\partial(uvr)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial(uYr)}{\partial x} + \frac{\partial(Yvr)}{\partial r} = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial Y}{\partial r}\right) \quad (\text{C.3})$$

con las condiciones de contorno:

$$x = 0 : \begin{cases} 0 < r < 1 : & u = 1, Y = 1, \\ r > 1 : & u = 0, Y = 0, \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

$$x > 0 : \begin{cases} r = 0 : & \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial Y}{\partial r} = v = 0, \\ r \rightarrow \infty : & u \rightarrow 0, Y \rightarrow 0, \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

donde  $S = \nu/D$  es el número de Schmidt del fluido considerado. Para el caso del Aire, a  $P = 1 \text{ atm}$  y  $T = 300 \text{ K}$ , se calculó con la ecuación (1.15) que  $\nu_A = 1,57 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Por otro lado el coeficiente de autodifusión  $D_A$  puede calcularse con la expresión dada por la referencia [3], sin más que hacer en (1.16)  $W_1 = W_2$  y particularizar para el caso del Aire:

$$D = 2,628 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{T^3/W_A}}{P\sigma_A^2\Omega^{(1,1)*}(T_A^*)} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (\text{C.6})$$

obteniéndose<sup>1</sup>  $D_A = 2,062 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , y por tanto un número de Schmidt  $S = \nu_A/D_A = 0,75$ .

El esquema numérico utilizado es análogo al considerado por las expresiones (4.12)-(4.13)-(4.14), sin más que hacer  $\rho = \mu = 1$  en ellas.

En las figuras siguientes se muestra el resultado de la integración numérica de (C.1)-(C.2)-(C.3) mediante el mencionado esquema numérico.

---

<sup>1</sup>El valor obtenido del coeficiente de autodifusión del aire está en clara correspondencia con los datos experimentales expuestos en [3] al respecto.

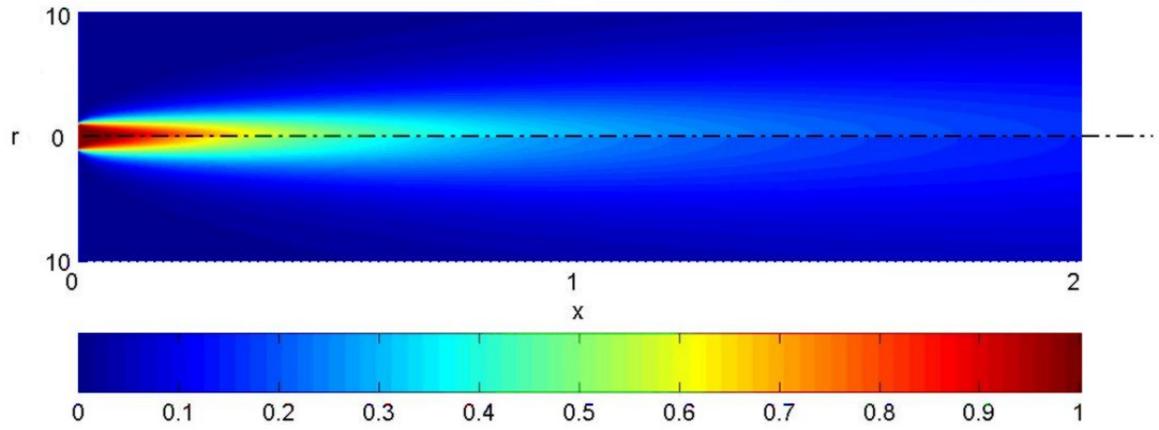


Figura C.1: Solución de la integración numérica de (C.1)-(C.2)-(C.3), mostrando contornos de velocidad axial  $u(x, r)$  (parte superior del eje de simetría), y contornos de fracción másica  $Y(x, r)$  (parte inferior del eje de simetría), para un número de Schmidt  $S = 0,75$  correspondiente a un flujo de Aire en Aire a  $P = 1atm$  y  $T = 300K$ . Calculado con *MATLAB v6.5*.

En la figura C.1 se observa como las máximas variaciones de las variables fluidodinámicas se producen en distancias axiales del orden de  $x \sim 1$ , esto es, en distancias del orden de la longitud de entrada hidrodinámica  $Re_{j,a}$ , como ya se adelantó previamente.

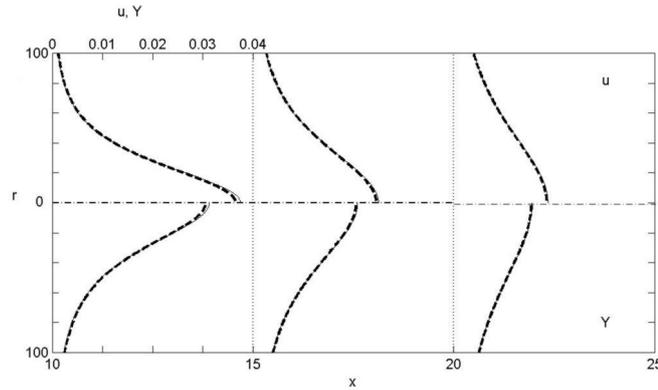


Figura C.2: Solución de la integración numérica de (C.1)-(C.2)-(C.3) (línea discontinua) y solución de Schlichting (línea continúa), mostrando perfiles de velocidad axial  $u(x, r)$  (parte superior del eje de simetría), y perfiles de fracción másica  $Y(x, r)$  (parte inferior del eje de simetría), con  $x = 10, 15, 20$  y para un número de Schmidt  $S = 0,75$  correspondiente a un flujo de Aire en Aire a  $P = 1atm$  y  $T = 300K$ . La escala de  $u$  e  $Y$  se muestra en la esquina superior izquierda. Calculado con *MATLAB v6.5*.

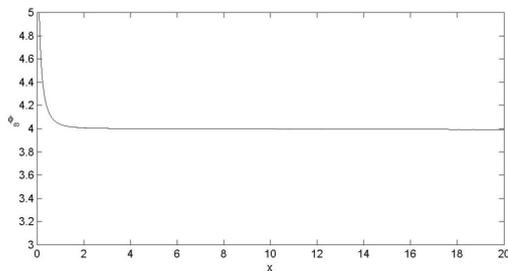


Figura C.3: Entrainment numérico  $\phi_\infty = -vr|_\infty$  en función de la coordenada longitudinal  $x$ . Para  $x \ll 1$  se produce una fuerte ingestión de fluido, mientras que para  $x \gg 1$   $\phi_\infty$  tiende asintóticamente a 4, como ya se calculó en (A.25).

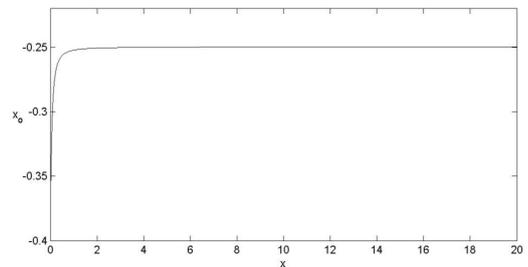


Figura C.4: Origen Virtual  $x_o = \lim_{x \rightarrow \infty} x - 3/(8x)$ , expresión obtenida del estudio realizado en [13]. El Origen Virtual representa una fuente puntual situada en  $x_o$  tal que el campo fluidodinámico obtenido para  $x \gg 1$  es una corrección de primer orden de la solución de Schlichting. El valor numérico obtenido es  $x_o = -0,249$ , bastante parecido al obtenido por Andrade [2]  $x_o = -18/80 = -0,225$  por conservación de la energía cinética, y por [13]  $x_o = -0,230$  mediante la integración numérica de (C.1)-(C.2)-(C.3).

# Apéndice D

## Códigos Numéricos.

### D.1. Integrador del Problema General y Mallador.

```

function jet1=f(jet1);
%Weightless Buoyant Jet
%Coordinate transformation;
%r=(eta); x=x(xi);
%Non Staggered grid;
%Implicit Method.

clc; clear; clf; format long;

fprintf('Axisymmetric Laminar Jet.\n'); fprintf('Press enter key
to read the mesh...\n'); pause;

[neta,nxi,eta_r,r,x,eta_ri,xi_x,ric,netao]=JMesh2;

%1. VARIABLES.
%=====
Z=zeros(1,nxi); Q=zeros(1,nxi); ENT=zeros(nxi,1); xo=zeros(nxi,1);
x1=zeros(nxi,1); T=zeros(1,nxi); v=zeros(1,netao);
vo=zeros(1,netao); uo=zeros(1,netao); Yo=zeros(1,netao);

fprintf('Press enter to read initial data line...\n'); pause;

alpha_u=1.00001; alpha_y=1.00001;

u(1,:)=r/(alpha_u-1)+alpha_u/(alpha_u-1);
Y(1,:)=r/(alpha_y-1)+alpha_y/(alpha_y-1);

for j=1:netao;
    if u(1,j)<0; u(1,j)=0; end
    if u(1,j)>1; u(1,j)=1; end
    if Y(1,j)<0; Y(1,j)=0; end
    if Y(1,j)>1; Y(1,j)=1; end
end

figure(1); plot(u(1,:),r(1,:),'ro-'); axis([0 1.5 0 5]); title('x
velocity initial profile'); figure(2); plot(Y(1,:),r(1,:),'o-');
axis([0 1.5 0 5]); title('Mass Fraction initial profile');

%2. INTEGRATION
%=====

e=0.069; %Molecular Weight Ratio Wj/Wo
S=1.39; %Schmidt;
beta=2.075; %Viscosity Ratio muj/muo;
G=0.1; %Buoyant Parameter;

Z(1,1)=2*trapez(r(1,:),rhof(1,:).*u(1,:).*u(1,:)); %Momentum Flux; (\sim 1)
Q(1,1)=2*trapez(r(1,:),rhof(1,:).*u(1,:).*r(1,:)); %Mass Flux;
T(1,1)=2*trapez(r(1,:),rhof(1,:).*Y(1,:).*u(1,:).*r(1,:)); %Lighter Fluid Mass Flux (\sim 1)

fprintf('Initial momentum flux:'); disp([Z(1,1)]);
fprintf('Initial mass flux:'); disp([Q(1,1)]); fprintf('Initial
Lighter Fluid mass flux:'); disp([T(1,1)]);

tol=1e-10; error=1.0; maxite=20000; errormax=1e20; k=0;
wM=0.29; %Momentum relaxation factor;
wY=0.29; %Species relaxation factor;
wC=0.999; %Continuity relaxation factor;

fprintf('Press enter to iterate...'); pause; time=clock;
ENT(1,1)=0; xo(1,1)=0;

for i=1:(nxi-1);

    uaux(1,:)=u(i,:);
    Yaux(1,:)=Y(i,:);
    if i>1; wM=0.8; wY=0.8; end
    if i>2; wC=1; end

    error=1.0; error_lag=1; error_c=1; error_cm=1; error_s=1;
    ite=0;

    while error>1e-6;
        ite=ite+1;
        t=0;

        rho(1,:)=(1./(Yaux(1,:)+e*(1-Yaux(1,:))));
        rho(2,:)=(1./(Y(i,:)+e*(1-Y(i,:))));
        if i>1; rho(3,:)=(1./(Y(i-1,:)+e*(1-Y(i-1,:)))); end
        YauxI(1,1:neta-1)=0.5*(Yaux(1,1:neta-1)+Yaux(1,2:neta));
        rhoi(1,:)=1./(YauxI(1,:)+e*(1-YauxI(1,:)));
        mu(1,:)=(e^0.5*Yaux(1,:)+e*(1-Yaux(1,:))*beta)./(e^0.5*Yaux(1,:)+e*(1-Yaux(1,:)));
        muI(1,:)=(e^0.5*YauxI(1,:)+e*(1-YauxI(1,:))*beta)./(e^0.5*YauxI(1,:)+e*(1-YauxI(1,:)));

        %-----

        if i==1;

```

```

C(1,2:neta-1)=0.5*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,3:neta).*v(1,3:neta).*r(1,3:neta)-...
ric(1,2:neta-1).*eta_ric(1,2:neta-1).*eta_r(1,2:neta-1).*mu(1,2:neta-1);

B(1,2:neta-1)=xi_x(i+1,1)*r(1,2:neta-1).*rho(1,2:neta-1).*uaux(1,2:neta-1)+...
ric(1,2:neta-1).*eta_ric(1,2:neta-1).*eta_r(1,2:neta-1).*mu(1,2:neta-1)+...
ric(1,1:neta-2).*eta_ric(1,1:neta-2).*eta_r(1,2:neta-1).*mu(1,1:neta-2);

A(1,2:neta-1)=-0.5*eta_r(1,2:neta-1).*v(1,1:neta-2).*r(1,1:neta-2).*rho(1,1:neta-2)...
-eta_r(1,2:neta-1).*ric(1,1:neta-2).*eta_ric(1,1:neta-2).*mu(1,1:neta-2);

R(1,2:neta-1)=xi_x(i+1,1)*u(i,2:neta-1).*r(1,2:neta-1).*u(i,2:neta-1).*rho(2,2:neta-1)+...
G*r(1,2:neta-1).*(1-rho(1,2:neta-1)*e);
end

if i>1;
C(1,2:neta-1)=0.5*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,3:neta).*v(1,3:neta).*r(1,3:neta)-...
ric(1,2:neta-1).*eta_ric(1,2:neta-1).*eta_r(1,2:neta-1).*mu(1,2:neta-1);

B(1,2:neta-1)=1.5*xi_x(i+1,1)*r(1,2:neta-1).*rho(1,2:neta-1).*uaux(1,2:neta-1)+...
ric(1,2:neta-1).*eta_ric(1,2:neta-1).*eta_r(1,2:neta-1).*mu(1,2:neta-1)+...
ric(1,1:neta-2).*eta_ric(1,1:neta-2).*eta_r(1,2:neta-1).*mu(1,1:neta-2);

A(1,2:neta-1)=-0.5*eta_r(1,2:neta-1).*v(1,1:neta-2).*r(1,1:neta-2).*rho(1,1:neta-2)...
-eta_r(1,2:neta-1).*ric(1,1:neta-2).*eta_ric(1,1:neta-2).*mu(1,1:neta-2);

R(1,2:neta-1)=2*xi_x(i+1,1)*u(i,2:neta-1).*r(1,2:neta-1).*u(i,2:neta-1).*rho(2,2:neta-1)+...
-0.5*u(i-1,2:neta-1).*u(i-1,2:neta-1).*r(1,2:neta-1).*xi_x(i+1,1).*rho(3,2:neta-1)+...
G*r(1,2:neta-1).*(1-rho(1,2:neta-1)*e);
end

E(1,1)=(4/3)*C(1,2)+B(1,2)/(C(1,2)/3-A(1,2)); %du/dr=0 en r=0; 2nd order
F(1,1)=-R(1,2)/(C(1,2)/3-A(1,2));
E(1,1)=1; %du/dr=0 en r=0; 1st order
F(1,1)=0;

%
%

for j=1:neta-2;
E(1,j+1)=-C(1,j+1)/(B(1,j+1)+A(1,j+1)*E(1,j));
F(1,j+1)=(R(1,j+1)-A(1,j+1)*F(1,j))/(B(1,j+1)+A(1,j+1)*E(1,j));
end

u(i+1,neta)=0; %r-->inf, u-->0;
for j=neta-1:-1:1;
u(i+1,j)=E(1,j)*(u(i+1,j+1)*w*(1-wM)*uaux(1,j+1))+F(1,j);
end
%-----

if i==1
v(1,1)=0;
u(i+1,neta)=0;
u(i,neta)=0;

for j=1:neta-1;
v(1,j+1)=v(1,j)*(rho(1,j)*r(1,j))/(rho(1,j+1)*r(1,j+1))-...
(0.5*xi_x(i+1,1)/(eta_ric(1,j)*rho(1,j+1)*r(1,j+1)))*(rho(1,j+1)*u(i+1,j+1)*r(1,j+1)-...
rho(2,j+1)*u(i,j+1)*r(1,j+1)+...
rho(1,j)*u(i+1,j)*r(1,j)-...
rho(2,j)*u(i,j)*r(1,j));
end
end

if i>1;
v(1,1)=0;
u(i+1,neta)=0;
u(i,neta)=0;

for j=1:neta-1;
v(1,j+1)=(1-wC)*vo(1,j)+wC*(v(1,j)*(rho(1,j)*r(1,j))/(rho(1,j+1)*r(1,j+1))-...
(0.25*xi_x(i+1,1)/(eta_ric(1,j)*rho(1,j+1)*r(1,j+1)))*(3*rho(1,j+1)*u(i+1,j+1)*r(1,j+1)-...
4*rho(2,j+1)*u(i,j+1)*r(1,j+1)+...
rho(3,j+1)*u(i-1,j+1)*r(1,j+1)+...
3*rho(1,j)*u(i+1,j)*r(1,j)-...
4*rho(2,j).*u(i,j)*r(1,j)+...
rho(3,j)*u(i-1,j)*r(1,j));
end
end

%-----

S3=v(1,neta)*S-1.5*eta_r(1,neta);
S2=2*eta_r(1,neta);
S1=-0.5*eta_r(1,neta);

if i==1;

C(1,2:neta-1)=0.5*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,3:neta).*v(1,3:neta).*r(1,3:neta)-...
(1/S)*ric(1,2:neta-1).*eta_ric(1,2:neta-1).*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,2:neta-1);

B(1,2:neta-1)=xi_x(i+1,1)*r(1,2:neta-1).*rho(1,2:neta-1).*u(i+1,2:neta-1)+...
(1/S)*ric(1,2:neta-1).*eta_ric(1,2:neta-1).*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,2:neta-1)+...
(1/S)*ric(1,1:neta-2).*eta_ric(1,1:neta-2).*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,1:neta-2);

A(1,2:neta-1)=-0.5*eta_r(1,2:neta-1).*v(1,1:neta-2).*r(1,1:neta-2).*rho(1,1:neta-2)...
-(1/S)*eta_r(1,2:neta-1).*ric(1,1:neta-2).*eta_ric(1,1:neta-2).*rho(1,1:neta-2);

R(1,2:neta-1)=xi_x(i+1,1)*u(i,2:neta-1).*r(1,2:neta-1).*Y(i,2:neta-1).*rho(2,2:neta-1);

end

if i>1;
C(1,2:neta-1)=0.5*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,3:neta).*v(1,3:neta).*r(1,3:neta)-...
(1/S)*ric(1,2:neta-1).*eta_ric(1,2:neta-1).*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,2:neta-1);

B(1,2:neta-1)=1.5*xi_x(i+1,1)*r(1,2:neta-1).*rho(1,2:neta-1).*u(i+1,2:neta-1)+...
(1/S)*ric(1,2:neta-1).*eta_ric(1,2:neta-1).*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,2:neta-1)+...
(1/S)*ric(1,1:neta-2).*eta_ric(1,1:neta-2).*eta_r(1,2:neta-1).*rho(1,1:neta-2);

A(1,2:neta-1)=-0.5*eta_r(1,2:neta-1).*v(1,1:neta-2).*r(1,1:neta-2).*rho(1,1:neta-2)...
-(1/S)*eta_r(1,2:neta-1).*ric(1,1:neta-2).*eta_ric(1,1:neta-2).*rho(1,1:neta-2);

R(1,2:neta-1)=2*xi_x(i+1,1)*u(i,2:neta-1).*r(1,2:neta-1).*Y(i,2:neta-1).*rho(2,2:neta-1)+...
-0.5*u(i-1,2:neta-1).*Y(i-1,2:neta-1).*r(1,2:neta-1)*xi_x(i+1,1).*rho(3,2:neta-1);

end

B(1,neta)=A(1,neta-1)*S3/S1-C(1,neta-1);
A(1,neta)=A(1,neta-1)*S2/S1-B(1,neta-1);
R(1,neta)=-R(1,neta-1);

```

```

E(1,1)=(4/3)*C(1,2)+B(1,2)/(C(1,2)/3-A(1,2)); %du/dr=0 en r=0; 2nd order
F(1,1)=-R(1,2)/(C(1,2)/3-A(1,2));
% E(1,1)=1; %du/dr=0 en r=0; 1st order
% F(1,1)=0;

for j=1:neta-2;
    E(1,j+1)=-C(1,j+1)/(B(1,j+1)+A(1,j+1)*E(1,j));
    F(1,j+1)=(R(1,j+1)-A(1,j+1)*F(1,j))/(B(1,j+1)+A(1,j+1)*E(1,j));
end

Y(i+1,neta)=(R(1,neta)-A(1,neta)*F(1,neta-1))/(B(1,neta)+A(1,neta)*E(1,neta-1));

if (B(1,neta)+A(1,neta)*E(1,neta-1))==0%Y(i+1,neta)<0;
    Y(i+1,neta)=0; t=1; end

%Y(i+1,neta)=0;
for j=neta-1:-1:1;
    Y(i+1,j)=E(1,j)*(Y(i+1,j+1)+vY+(1-wY)*Yaux(1,j+1))+F(1,j);
end

%-----
error_lag=norm(uaux(1,:)-u(i+1,:),inf)+norm(Yaux(1,:)-Y(i+1,:),inf);
error_cm=norm(u(i+1,:)-uo(1,:),inf);
error_c=norm(v(1,:)-vo(1,:),inf);
error_s=norm(Y(i+1,:)-Yo(1,:),inf);

error=error_lag+error_cm+error_c+error_s;
clc;
disp([i+1 x(i+1,1) ite error Z(1,i) Q(1,i) T(1,i) ENT(i) v(1,neta)])
disp([error_lag error_cm error_c error_s xo(i) x1(i) t])
disp([(3./(8*x(i+1,1)))-u(i+1,1)] (1./(8*x(i+1,1))-Y(i+1,1))]);
disp([R(1,neta)-A(1,neta)*F(1,neta-1) B(1,neta)+A(1,neta)*E(1,neta-1) Y(i+1,neta)])
disp([S3*Y(i+1,neta)+S2*Y(i+1,neta-1)+S1*Y(i+1,neta-2)]);

uaux(1,:)=u(i+1,:);
Yaux(1,:)=Y(i+1,:);

uo(1,:)=u(i+1,:);
vo(1,:)=v(1,:);
Yo(1,:)=Y(i+1,:);

if error>errormax;
    error('non convergent')
    break; %aborta el bucle
end
% figure(2); subplot(1,3,1); plot(u(i+1,:),r(1,:),'o'); axis([0 1.5 0.8 1.2]);
% subplot(1,3,2); plot(Y(i+1,:),r(1,:),'o'); axis([0 1.5 0.8 1.2]);
% subplot(1,3,3); plot(v,r,'o'); axis([-200 1 0.9 1.1])
% pause;
end

rhof(1,:)=1./(Y(i+1,:)+e*(1-Y(i+1,:)));
ENT(i+1,1)=-rhof(1,neta)*v(1,neta)*r(1,neta); %Entrainment
xo(i+1,1)=x(i+1,1)-3/(8*u(i+1,1)); %Virtual Origin
x1(i+1,1)=x(i+1,1)-1/(8*Y(i+1,1));
%Momentum Flux conservation;
H(i+1,1)=trapz(r(1,:),G*(1-rhof(1,:)*e).*r(1,:));
Z(1,i+1)=2*trapz(r(1,:),rhof(1,:).*u(i+1,:).*r(1,:))-2*trapz(x(1:(i+1),1),H(1:(i+1),1))-Z(1,1);
%Mass flux conservation;
Q(1,i+1)=2*(trapz(r(1,:),rhof(1,:).*u(i+1,:).*r(1,:))-trapz(x(1:(i+1),1),ENT(1:i+1,1))-Q(1,1);
T(1,i+1)=2*trapz(r(1,:),rhof(1,:).*Y(i+1,:).*u(i+1,:).*r(1,:))-T(1,1);
%
% figure(2); subplot(1,3,1); plot(u(i+1,:),r(1,:),'o'); axis([0 1.5 0.8 1.2]);
% subplot(1,3,2); plot(Y(i+1,:),r(1,:),'o'); axis([0 1.5 0.8 1.2]);
% subplot(1,3,3); plot(v,r,'o'); axis([-200 2 0.9 1.1])
%
% pause;
if
i==25|i==50|i==100|i==150|i==200|i==250|i==500|i==1000|i==2000|i==2500|i==3000|i==4000|i==5000;
save u u save Y Y save x x save ENT ENT save r r end
end
%-----

figure(3); subplot(2,1,1); plot(x(:,1),Z(1,:)), xlabel('x'),
ylabel('Momentum Flux residual '),
subplot(2,1,2); plot(x(:,1),Q(1,:)), xlabel('x'), ylabel('Mass Flux residual'),
%VIRTUAL ORIGIN
figure(4); plot(x(:,1),u(:,1).^~-1,'r'), xlabel('x'),
ylabel('1/Umax');hold on; utmax=(3/8)*x(:,1).^~-1;
plot(x(:,1),utmax.^~-1); ytmx=(1/8)*x(:,1).^~-1;

figure(5); plot(x(:,1),xo), xlabel('x'), ylabel('xo'), axis([0 20
-0.4 -0.22]), title('origen virtual');

figure(6); plot(x,ENT); xlabel('x'), ylabel('ENT'), axis([0 20 3.8
5]), title('entrainment');

figure(7); plot(x,ytmax); hold on; plot(x,Y(:,1),'--');
plot(x,utmax,'r'); plot(x,u(:,1),'r--'); axis([0 10 0 1.5]);

time=etime(clock,time);
disp('elapsed time(s)...'); disp([time]);
%-----

function [neta,nxi,eta_r,r,x,eta_ri,xi_x,ric,netao]=JMesh2;

%Axisymmetric Laminar Jet
%Coordinate Transformation
%Polinomial Approximation

clc; clear; clf; format long;

%1. PHYSICAL DOMAIN:
%=====

rmin=0; rmax=5000; xmax=8;

%2. COMPUTATIONAL DOMAIN:
%=====

etamin=0; etamax=1500; heta=0.5; neta=(etamax-etamin)/heta+1;

ximin=0; ximax=2500; hxi=1; nxi=(ximax-ximin)/hxi+1;

n=nxi*neta;
fprintf('Coordinate Transformation. Axisymmetric
Jet.\n');
fprintf('Number of mesh points...\n'); disp([n]);

```

```

eta=linspace(etamin,etamax,neta); xi=linspace(ximin,ximax,nxi)';
xi_x=zeros(nxi,1); eta_r=zeros(1,neta); eta_rr=zeros(1,neta);
r=zeros(1,neta);

%x=x(xi)=a*xi^n+dx/dxi(x=0)*xi;
n=2; d=0.00001; a=xmax/(ximax^n)-d/(ximax^(n-1));
x=a*xi.^n+d*xi;
[ETA,XI]=meshgrid(eta,xi);

%3. COORDINATE TRANSFORMATION:
%=====
etao=200; netao=(etao-etamin)/neta+1; ro=1;
a1=0.000001; %dr/deta(eta=0)=a1;
a2=0.000001; %dr/deta(eta=etao)=a2;
a3=0; %d2r/deta2(eta=etao)=a3;

%5TH ORDER APPROXIMATION;
b=[ro-a1*etao a2-a1 a3 rmax-a1*etamax]';

A=[etao^5 etao^4 etao^3 etao^2;
5*etao^4 4*etao^3 3*etao^2 2*etao;
20*etao^3 12*etao^2 6*etao 2;
etamax^5 etamax^4 etamax^3 etamax^2];

c=inv(A)*b;

r(1,:)=c(1)*eta(1,:).^5+c(2)*eta(1,:).^4+c(3)*eta(1,:).^3+c(4)*eta(1,:).^2+a1*eta(1,:);

%METRICS:
xi_x(:,1)=1./(n*a*xi(:,1).^(n-1)+d)/hxi;
eta_r(1,:)=1./(5*c(1)*eta(1,:).^4+4*c(2)*eta(1,:).^3+3*c(3)*eta(1,:).^2+2*c(4)*eta(1,:)+a1)/heta;

%INTERPOLATED METRICS:
for j=1:neta-1;
eta_ri(1,j)=0.5*(eta_r(1,j)+eta_r(1,j+1));
etam(1,j)=0.5*(eta(1,j)+eta(1,j+1));
ric(1,j)=c(1)*etam(1,j).^5+c(2)*etam(1,j).^4+c(3)*etam(1,j).^3+c(4)*etam(1,j).^2+a1*etam(1,j);
end

for i=1:nxi-1;
xi_xic(i,1)=0.5*(xi_x(i,1)+xi_x(i+1,1));
end

% [R,X]=meshgrid(r,x);
% figure(5);
% for i=1:nxi, plot(X(i,:),R(i,:)); axis([-1 10 -1 1]); axis square;
% title('Coordinate transformation'); xlabel('x'), ylabel('r'); hold on; end
% for j=1:neta, plot(X(:,j),R(:,j)); hold on; end
% %
figure(1); plot(eta,r); xlabel('\eta'); ylabel('r'); axis([0 500 0
2]);

figure(2); plot(eta_r,r); xlabel('\eta_r'); ylabel('r'); axis([0
500 0 2]);

figure(3); plot(x,xi); xlabel('x'); ylabel('\xi');

figure(4); plot(x,xi_x); xlabel('x'); ylabel('\xi_x');

for j=1:neta;
if r(1,j)<0|eta_r(1,j)<0;
error('mesh error');
end
end

for i=1:nxi;
if x(i,1)<0|xi_x(i,1)<0;
error('mesh error');
end
end
end

```

## D.2. Integradores del Campo Cercano.

```

%Shooting Method.
%Axysymmetric Laminar Weightless Jet.
%Near Field.
%Shooting Point eta=0;

clear; clc; clf; format long;

%Schmidt Number:
Sc=1.69;

%Molecular Weight Ratio: e=W(1)/W(p);
e=1; emin=0.00099;

lambda1=-0.33833895334257; lambda2=0.69137714505198;
lambda3=-0.19121632164108; lambda4=0.69142963628160 ;
lambda5=-0.19302543041617;

lambda=[lambda1 lambda2 lambda3 lambda4 lambda5];

%1. COMPUTATIONAL PLANE.
%=====
etamax=200; etamin=-50; h=0.1; neta=(etamax-etamin)/h+1;
eta=linspace(etamin,etamax,neta); nmed=etamin/h+1;

fprintf('Axysymmetric Laminar Jet.\n'); fprintf('Self
SimilarSolution in Near Field.\n'); fprintf('Non Linear Shooting
Method and 4th Order Runge-Kutta Integration\n');
fprintf('Shooting Point eta=0.\n'); fprintf('Number of
Computational Points...'); disp([neta]); fprintf('Schmidt
Number...'); disp([Sc]); fprintf('Molecular Weight Ratio..');
disp([e]); fprintf('Press enter to iterate...\n'); pause;

d=1; while e>emin;

%2. INTEGRATION.
%=====
ysol=zeros(neta,5); A=zeros(5,5); c=zeros(5,1); y0=zeros(1,5);

error=1; tol=0.00001; ite=0; maxite=100; DL1=0; DL2=0; DL3=0;
DL4=0; DL5=0; s=1;

while error>tol;

    ite=ite+1;
    if ite>maxite
        disp('no converge'); break;
    end

    %Boundary Conditions at eta=0;
    %alfa=[y1 y2 y3 y4 y5]=[F (F'/rho) (F''/rho) Y (rhoY')]
    alfa=[lambda];

    %Boundary Conditions at eta=etamin;
    beta1=[etamin 1 0 1 0];

    %Boundary Conditions at eta=etamax;
    beta2=[0 0 0 0 0];

    %Initial variable line;
    y=[alfa];
    ysol(nmed,:)=y(1,:); %initial solution at eta=0;
    rho=1/(y(4)+e*(1-y(4))); %initial density at eta=0;

    %Runge-Kutta 4th order:

    for i=nmed:-1:2;
        k1=-h*LJetShootingSys2(eta(i),y,Sc,e);
        k2=-h*LJetShootingSys2(eta(i)-h/2,y+k1/2,Sc,e);
        k3=-h*LJetShootingSys2(eta(i)-h/2,y+k2/2,Sc,e);
        k4=-h*LJetShootingSys2(eta(i)-h,y+k3,Sc,e);
        y=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
        ysol(i-1,:)=y(1,:);
    end

    for i=nmed:neta-1;
        k1=h*LJetShootingSys2(eta(i),y,Sc,e);
        k2=h*LJetShootingSys2(eta(i)+h/2,y+k1/2,Sc,e);
        k3=h*LJetShootingSys2(eta(i)+h/2,y+k2/2,Sc,e);
        k4=h*LJetShootingSys2(eta(i)+h,y+k3,Sc,e);
        y=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
        ysol(i+1,:)=y(1,:);
    end

    error=abs(ysol(1,1)-beta1(1))+abs(ysol(1,2)-beta1(2))+...
        abs(ysol(1,4)-beta1(4))+abs(ysol(neta,2)-beta2(2))+...
        abs(ysol(neta,4)-beta2(4));

    disp([lambda error ite e]);

    %Shooting Parameters: Generalized Newton-Raphson Method.

    Z=0.000001;

    [Dlambda,y0,A]=LJetShootingNR3(neta,ysol,y0,lambda,Z,...
    DL1,DL2,DL3,DL4,DL5,A,s,beta1,beta2);

    s=s+1;
    DL1=Dlambda(1);
    DL2=Dlambda(2);
    DL3=Dlambda(3);
    DL4=Dlambda(4);
    DL5=Dlambda(5);

    lambda=lambda+Dlambda';

    if s==7; s=0; end;

end rhof(:,1)=1./(ysol(:,4)+e*(1-ysol(:,4)));
Finf(d)=ysol(neta,1); E(d)=1/e; if e==1; F1(1)=ysol(neta,1); end
if e==0.1; F1(2)=ysol(neta,1); end if e==0.01; F1(3)=ysol(neta,1);
end if e==0.001; F1(4)=ysol(neta,1); end;

d=d+1; de=0.001; if e<0.01; de=1e-4; end e=e-de; end

figure(1); subplot(2,2,1); plot(ysol(:,1),eta); xlabel('F');
subplot(2,2,2); plot(ysol(:,2),eta); xlabel('F'/rho');
subplot(2,2,3); plot(ysol(:,4),eta); xlabel('Y');

```

```

        subplot(2,2,4); plot(rhof,eta); xlabel('\rho');
%-----
function [Dlambda,y0,A]=LJetShootingNR3(neta,ysol,y0,lambda,Z,...
    DL1,DL2,DL3,DL4,DL5,A,s,beta1,beta2);
Dlambda=zeros(5,1);
if s==1;
    Dlambda(1)=Z*lambda(1);
    y0=[ysol(1,1) ysol(1,2) ysol(1,4) ysol(neta,2)...
        ysol(neta,4)];
end
if s==2;
    Dlambda(2)=Z*lambda(2);
    A(1,1)=(ysol(1,1)-y0(1))/DL1;
    A(2,1)=(ysol(1,2)-y0(2))/DL1;
    A(3,1)=(ysol(1,4)-y0(3))/DL1;
    A(4,1)=(ysol(neta,2)-y0(4))/DL1;
    A(5,1)=(ysol(neta,4)-y0(5))/DL1;
    y0=[ysol(1,1) ysol(1,2) ysol(1,4) ysol(neta,2)...
        ysol(neta,4)];
end
if s==3;
    Dlambda(3)=Z*lambda(3);
    A(1,2)=(ysol(1,1)-y0(1))/DL2;
    A(2,2)=(ysol(1,2)-y0(2))/DL2;
    A(3,2)=(ysol(1,4)-y0(3))/DL2;
    A(4,2)=(ysol(neta,2)-y0(4))/DL2;
    A(5,2)=(ysol(neta,4)-y0(5))/DL2;
    y0=[ysol(1,1) ysol(1,2) ysol(1,4) ysol(neta,2)...
        ysol(neta,4)];
end
if s==4;
    Dlambda(4)=Z*lambda(4);
    A(1,3)=(ysol(1,1)-y0(1))/DL3;
    A(2,3)=(ysol(1,2)-y0(2))/DL3;
    A(3,3)=(ysol(1,4)-y0(3))/DL3;
    A(4,3)=(ysol(neta,2)-y0(4))/DL3;
    A(5,3)=(ysol(neta,4)-y0(5))/DL3;
    y0=[ysol(1,1) ysol(1,2) ysol(1,4) ysol(neta,2)...
        ysol(neta,4)];
end
if s==5;
    Dlambda(5)=Z*lambda(5);
    A(1,4)=(ysol(1,1)-y0(1))/DL4;
    A(2,4)=(ysol(1,2)-y0(2))/DL4;
    A(3,4)=(ysol(1,4)-y0(3))/DL4;
    A(4,4)=(ysol(neta,2)-y0(4))/DL4;
    A(5,4)=(ysol(neta,4)-y0(5))/DL4;
    y0=[ysol(1,1) ysol(1,2) ysol(1,4) ysol(neta,2)...
        ysol(neta,4)];
end
if s==6;
    A(1,5)=(ysol(1,1)-y0(1))/DL5;
    A(2,5)=(ysol(1,2)-y0(2))/DL5;
    A(3,5)=(ysol(1,4)-y0(3))/DL5;
    A(4,5)=(ysol(neta,2)-y0(4))/DL5;
    A(5,5)=(ysol(neta,4)-y0(5))/DL5;
    y0=[ysol(1,1) ysol(1,2) ysol(1,4) ysol(neta,2)...
        ysol(neta,4)];
    c=[beta1(1)-ysol(1,1) beta1(2)-ysol(1,2) beta1(4)-ysol(1,4)...
        beta2(2)-ysol(neta,2) beta2(4)-ysol(neta,4)];
    Dlambda=inv(A)*c;
end
%-----
function f=LJetShootingSys2(eta,y,Sc,e);
%y1=F; y2=F'/rho; y3=(F'/rho)'; y4=Y; y5=rho*Y';
%Sistema equivalente:
%y1'=rho*y2;
%y2'=y3;
%y3'=-0.5*y1*y3;
%y4'=y5/rho;
%y5'=-0.5*Sc*y1*y5/rho;
rho=1/(y(4)+e*(1-y(4))); f(1)=rho*y(2); f(2)=y(3);
f(3)=-0.5*y(1)*y(3); f(4)=y(5)/rho; f(5)=-0.5*Sc*y(1)*y(5)/rho;
%=====
%Axisymmetric Weightless Laminar Jet
%Near Field
%e=0; 1.39>S>1
clear; clc; format long;
%Convergence History:
%S=1;
%C=[2.18 -0.06 1.73];
%S=1.01;
%C=[ 2.16474598127436 -0.06581486238995 1.64475292785376];
%S=1.27;
%C=[ 2.19109682871979 -0.21753841207590 -0.09571591192663];
%S=1.30;
%C=[2.19757101717611 -0.37320412180875 -0.16751571321311];
%S=1.39; eta=14;
C=[ 2.20649229241349 -0.37056758055338 -0.59861118243837 ];
%Initialization of Constants
%-----
% C1=2.18; %F_inf
% C2=-0.06; %A
% C3=1.73; %eta_inf
%
% C=[C1 C2 C3];

```

```

%Integration Parameters
%-----
maxerror=1e-6;
e=0; %Molecular Weight Ratio;
S=1.39; %Schmidt
k=1; dS=0.01; Smax=1.39; error=10*maxerror; iter=0; Z=0.01;

pause;
%Computational Plane
%-----
% s=1:0.01:1.39;
% Etamax=-17.76*s.^2+34.76*s;
% etamax=Etamax(1); %detamax=0.0769;
etamax=14; etamin=-10;
%while S<Smax;
etao=[etamax etamin]; h=0.1; neta=(etamax-etamin)/h+1;
%etao=linspace(etamax,etamin,neta);

%INTEGRATION
%-----

%pause;
while abs(error)>maxerror
    iter=iter+1;
    Y0(1)=C(1)+C(2)*exp(-0.5*C(1)*etamax)*(etamax+C(3)+2/C(1)); %F
    Y0(2)=-C(2)*exp(-0.5*C(1)*etamax); % (F'Y)
    Y0(3)=0.5*C(2)*C(1)*exp(-0.5*C(1)*etamax); % (F'Y)'
    Y0(4)=(0.5*S*C(1)*(etamax+C(3)))^(-1); %Y
    Y0(5)=-1/(etamax+C(3)); % (Y'/Y)

    %options = odeset('RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-4);
    %options=[];

    [eta,y]=ode15s('f',[etao], Y0);
    N=length(eta);
    y=real(y);

    R(1)=y(N,1)-etamin;
    R(2)=y(N,2)-1;
    R(3)=y(N,4)-1;
    error=sum(abs(R));

%pause;

for i=1:3
    C1=C;
    dC=Z*C(i);
    C1(i)=C1(i)+dC;

    Y01(1)=C1(1)+C1(2)*exp(-0.5*C1(1)*etamax)*(etamax+C1(3)+2/C1(1)); %F
    Y01(2)=-C1(2)*exp(-0.5*C1(1)*etamax); % (F'Y)
    Y01(3)=0.5*C1(2)*C1(1)*exp(-0.5*C1(1)*etamax); % (F'Y)'
    Y01(4)=(0.5*S*C1(1)*(etamax+C1(3)))^(-1); %Y
    Y01(5)=-1/(etamax+C1(3)); % (Y'/Y)

    %options = odeset('RelTol',1e-1,'AbsTol',1e-4);
    [eta1,y1]=ode15s('f',etao, Y01);
    N1=length(eta1);
    y1=real(y1);

    R1(1)=y1(N1,1)-etamin;
    R1(2)=y1(N1,2)-1;
    R1(3)=y1(N1,4)-1;

    A(1,i)=(R1(1)-R(1))/dC;
    A(2,i)=(R1(2)-R(2))/dC;
    A(3,i)=(R1(3)-R(3))/dC;

end

delta=inv(A)*R';
lambda=0.5; %damping factor
delta=(lambda*delta);
C=C+delta';
disp([C iter error S etamax]);
% figure(1); subplot(2,2,1); plot(y(:,1),eta); xlabel('F');
% subplot(2,2,2); plot(y(:,2),eta); xlabel('F'/rho');
% subplot(2,2,3); plot(y(:,4),eta); xlabel('Y');
%pause;

end
%Cfinal(k,:)=C(1,:);
%S=S+dS;
%etamax=Etamax(k);
%k=k+1;
%error=1;
%iter=0;
%end

```

# Bibliografía

- [1] Schlichting H.: *"Boundary Layer Theory,"* Pergamon Press, London 1955.
- [2] Andrade E.N., Tsien L.C.: *"The velocity distribution of a liquid into liquid jet,"* The Physical Society 49 381-391. London, 1937.
- [3] Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B.: *"Molecular Theory of Gases and Liquids,"* John Wiley and Sons, Wisconsin, 1954.
- [4] Vargaftik N.B., Vinogradov Y.K., Yargin V.S.: *"Handbook of Physical Properties of Liquid and Gases,"* Begell House, New York 1996.
- [5] Wilke C.R.: *"A Viscosity Equation for Gas Mixtures,"* The Journal of Chemical Physics, Vol. 18, No. 4 (1950).
- [6] Rosner D.E.: *"Transport Processes in Chemically Reacting Flows,"* Dover, 2000.
- [7] Golubev I.F.: *"Viscosity of Gases and Gas Mixtures"* Moscow, 1959.
- [8] Kestin J., Ro S.T., Wakeham W.A.: *"Viscosity of the Binary Gaseous Mixture Helium-Nitrogen,"* The Journal of Chemical Physics, Vol. 56, No. 5 (1972)
- [9] Anderson J.D. Jr.: *"Computational Fluid Dynamics,"* McGraw-Hill.
- [10] Anderson D.A, Tanhenhill J.C., and Pletcher R.H.: *"Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer,"* McGraw-Hill, 1986.
- [11] Thompson J.F., Warsi Z.V.A., and Wayne Mastin C.: *"Numerical Grid Generation: Foundations and Applications,"* North-Holland, New York, 1985.
- [12] Spurk J.H.: *"Fluid Mechanics,"* Springer Verlag, 1997.
- [13] Sánchez A.L., Revuelta A., Liñán A.: *"The virtual origin as a first-order correction for the far-field description of laminar jets,"* Physics of Fluids, Vol. 14, No. 6 (2002).
- [14] Rosenhead L.: *"Laminar Boundary Layers,"* Dover Publications, 1963.